CORRIGÉ du DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 8
PSI2 2023-2024

PROBLÈME 1 *librement inspiré de Centrale PSI 2009*

PARTIE A. Décomposition en valeurs singulières

1. Soit $X \in \mathbb{R}^n$.

Si $AX = 0$, alors $A^\top AX = 0$, d'où l'inclusion $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(A^\top A)$, soit $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

Réciproquement, si $A^\top AX = 0$, alors $X^\top A^\top AX = 0$, soit $(AX)^\top AX = 0$, soit $\|AX\|^2 = 0$, et cela entraîne $AX = 0$. On a donc $\text{Ker}(A^\top A) \subset \text{Ker}(A)$, soit $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f)$.

Finalement, $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$ et, comme ce sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$, ils ont alors le même rang par le théorème du rang, soit $\text{rg}(A^\top A) = \text{rg}(A) = r$.

2. Il est immédiat que $(A^\top A)^\top = A^\top A$ et $(AA^\top)^\top = AA^\top$, ce sont des matrices symétriques.

Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^\top A^\top AX = \|AX\|^2 \geq 0$, donc $A^\top A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. En rempaçant A par $A^\top$, la matrice symétrique $AA^\top$ est aussi positive.

3. Par le théorème spectral, on sait que la matrice symétrique réelle $A^\top A$ est diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage orthogonale, on peut donc écrire $A^\top A = PDP^{-1} = PDP^\top$, avec P orthogonale et $D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, où les λ_i sont les valeurs propres de $A^\top A$, chacune ayant autant d'occurrences que sa multiplicité.

On peut écrire de même $AA^\top = QD'Q^\top$, avec Q orthogonale et D' diagonale. Mais l'énoncé nous rappelle que les matrices $A^\top A$ et $AA^\top$ ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. On peut donc s'arranger pour avoir $D' = D$. *Pour les sceptiques, disons que si l'on diagonalise $A^\top A$ et $AA^\top$ indépendamment avec des matrices de passage orthogonales, bien sûr on ne trouvera pas forcément la même matrice diagonale puisque les valeurs propres, même si elles sont identiques, ne seront pas forcément placées dans le même ordre. Puisque les valeurs propres sont réelles, on peut par exemple s'imposer de les ranger dans l'ordre décroissant, on aura ainsi la même réduite diagonale pour $A^\top A$ et pour $AA^\top$.*

4. La matrice diagonale D, semblable à $A^\top A$, a le même rang, à savoir r. Or, pour une matrice diagonale, il est évident que le rang est le nombre de coefficients diagonaux non nuls.

5. Les matrices $A^\top A$ et $(UAV)^\top UAV = V^\top A^\top U^\top UAV = V^{-1}(A^\top A)V$ sont semblables, donc ont les mêmes valeurs propres (positives), avec les mêmes multiplicités. Les valeurs singulières de A et de UAV, qui sont les racines carrées des valeurs propres de $A^\top A$ et de $(UAV)^\top UAV$, sont donc aussi les mêmes.

6. Si A est symétrique réelle, par le théorème spectral, on sait que A est diagonalisable. Notons $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de A, alors $A^\top A = A^2$ a pour valeurs propres $\alpha_1^2, \cdots, \alpha_n^2$. Les valeurs singulières de A sont les racines carrées des valeurs propres de $A^\top A$, c'est-à-dire $|\alpha_1|, \cdots, |\alpha_n|$.

En conclusion, les valeurs singulières d'une matrice symétrique réelle sont les valeurs absolues de ses valeurs propres.

7.a. La matrice $A^\top A$ étant symétrique réelle, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_1 = (X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de cette matrice. On peut ordonner cette base de façon que ses r premiers vecteurs soient vecteurs propres de $A^\top A$ pour des valeurs propres non nulles. Ces vecteurs vérifient alors $A^\top AX_i = \lambda_i X_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, d'où **(1)**. Les $n - r$ derniers vecteurs X_i sont vecteurs propres de $A^\top A$ pour la valeur propre 0, ils appartiennent donc à $\text{Ker}(A^\top A) = \text{Ker}(g)$, c'est-à-dire à $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(f)$ d'après la question **1.**, et ils en constituent une base car c'est une famille libre de $n - r$ vecteurs, avec $\dim(\text{Ker}\, f) = n - r$.

b. Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on a $AX_i \neq 0$, par exemple car $A^\top AX_i = \lambda_i X_i \neq 0$. Si $(i, j) \in [\![1, r]\!]^2$ avec $i \neq j$, alors

$$(AX_i|AX_j) = X_i^\top A^\top AX_j = X_i^\top\,(\lambda_j X_j) = \lambda_j\, X_i^\top X_j = \lambda_j\,(X_i|X_j) = 0\ ,$$

c'est donc une famille orthogonale. Comme les vecteurs sont non nuls, c'est une famille libre. Les vecteurs AX_i sont bien dans $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(f)$, il y en a r et $\dim(\mathrm{Im}\, f) = r$, ils forment donc une base (orthogonale) de $\mathrm{Im}(f)$.

c. Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on a $\|AX_i\|^2 = X_i^\top A^\top AX_i = X_i^\top(\lambda_i X_i) = \lambda_i\, X_i^\top X_i = \lambda_i$ puisque les vecteurs X_i sont unitaires. Donc $\|AX_i\| = \sqrt{\lambda_i} = \sigma_i$, relation vraie aussi si $r+1 \leq i \leq n$.

d. Posons $Y_i = \dfrac{AX_i}{\|AX_i\|} = \dfrac{1}{\sigma_i}\, AX_i$ pour $i \in [\![1, r]\!]$. Soit d'autre part $(Y_{r+1}, \cdots, Y_n)$ une base orthonormale de $(\mathrm{Im}\, f)^\perp$. La famille $\mathcal{B}_2 = (Y_1, \cdots, Y_r, Y_{r+1}, \cdots, Y_n)$, obtenue par concaténation d'une base orthonormale de $\mathrm{Im}\, f$ et d'une base orthonormale de $(\mathrm{Im}\, f)^\perp$, est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. On a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la relation $AX_i = \sigma_i Y_i$ (distinguer les cas $i \leq r$ et $i > r$), ce que l'on peut écrire aussi $f(X_i) = \sigma_i Y_i$ puisque A représente f dans la base canonique. Cela signifie que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = \Delta$.

e. Par les formules de changement de bases, on obtient

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_2} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) \cdot P^{-1}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1}\ ,$$

soit $A = P_1\, \Delta\, P_2$, avec $P_1 = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_2}$ et $P_2 = P^{-1}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1} = \big(P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1}\big)^\top = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_0}$. Ce sont des matrices orthogonales, car ce sont des matrices de passage entre des bases orthonormales.

8. Le sens indirect a été traité question **5.**

Réciproquement, si deux matrices A et B ont les mêmes valeurs singulières $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$, alors en posant $\Delta = \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$, il existe P_1 et P_2 orthogonales telles que $A = P_1 \Delta P_2$, il existe Q_1 et Q_2 orthogonales telles que $B = Q_1 \Delta Q_2$. On en tire $\Delta = P_1^{-1} A P_2^{-1} = P_1^\top A P_2^\top$, puis $B = (Q_1 P_1^\top)\, A\, (P_2^\top Q_2)$, les matrices $U = Q_1 P_1^\top$ et $V = P_2^\top Q_2$ étant orthogonales.

PARTIE B. Vecteurs singuliers

9.a. Yaka l'écrire: $\|AX\|^2 = (AX)^\top AX = X^\top (A^\top AX) = (X|A^\top AX)$.

b. Par le théorème spectral, la matrice $A^\top A$ étant symétrique réelle, de valeurs propres σ_1^2, $\cdots$, σ_n^2, il existe une base orthonormale $(E_1, \cdots, E_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $A^\top A E_i = \sigma_i^2 E_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On décompose le vecteur X dans cette base: $X = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i E_i$. On a alors $A^\top AX = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i \sigma_i^2 E_i$ puis, la base de décomposition étant orthonormale, le produit scalaire de ces deux vecteurs est la somme des produits deux à deux de leurs coordonnées, soit

$$\|AX\|^2 = (X|A^\top AX) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2\ .$$

En majorant chaque σ_i^2 par σ_n^2, on a donc $\|AX\|^2 \leq \sigma_n^2 \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sigma_n^2\, \|X\|^2$. On minore de la même façon: $\|AX\|^2 \geq \sigma_1^2\, \|X\|^2$. On obtient bien $\sigma_1 \|X\| \leq \|AX\| \leq \sigma_n \|X\|$.

c. Pour $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a donc $\sigma_1 \leq \dfrac{\|AX\|}{\|X\|} \leq \sigma_n$. Les réels σ_1 et σ_n sont respectivement un minorant et un majorant de l'ensemble des quotients $\dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$ lorsque X décrit $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour montrer que ce sont le minimum et le maximum, il suffit de vérifier que ces valeurs sont atteintes. Or, si l'on reprend la base orthonormale $(E_1, \cdots, E_n)$ introduite en **b.**, on a, pour tout i, $\|E_i\| = 1$ et $\|AE_i\|^2 = (E_i|A^\top AE_i) = (E_i|\sigma_i^2 E_i) = \sigma_i^2\|E_i\|^2 = \sigma_i^2$. En particulier, $\dfrac{\|AE_1\|}{\|E_1\|} = \sigma_1$ et $\dfrac{\|AE_n\|}{\|E_n\|} = \sigma_n$.

d. Posons $\mathcal{E} = \left\{\dfrac{\|AX\|}{\|X\|}\ ;\ X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\}$. On a $\mathcal{E} \subset [\sigma_1, \sigma_n]$ par le **c.** ci-dessus.

Par ailleurs, l'application $X \mapsto AX$ de $\mathbb{R}^n$ vers lui-même est continue, car elle est linéaire en dimension finie. La norme étant 1-lipschitzienne donc continue, on a ainsi la continuité de $f : X \mapsto \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$ comme application de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{R}$. L'application "affine" $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ définie par $\psi(t) = (1-t)E_1 + tE_n$ est continue et elle est à valeurs dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (en effet, les vecteurs E_1 et E_n étant linéairement indépendants, $\psi(t)$ ne peut s'annuler que si t et $1-t$ sont simultanément nuls, ce qui est impossible). L'application composée $g = f \circ \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ est donc continue, et comme $g(0) = f(E_1) = \sigma_1$ et $g(1) = f(E_n) = \sigma_n$, elle prend toutes les valeurs comprises entre σ_1 et σ_n d'après le théorème des valeurs intermédiaires. On a donc $\mathcal{E} = [\sigma_1, \sigma_n]$.

10. S'il existe X et Y comme décrits dans l'énoncé, alors $A^\top AX = \sigma\, A^\top Y = \sigma^2 X$. Comme X est non nul, le réel σ^2 est valeur propre de $A^\top A$, donc $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ est valeur singulière de A.

Réciproquement, supposons σ valeur singulière de A. Alors σ^2 est valeur propre de $A^\top A$, donc il existe X non nul (et, quitte à le remplacer par un vecteur colinéaire, on peut le supposer unitaire) tel que $A^\top AX = \sigma^2 X$.

- si $\sigma \neq 0$, posons $Y = \dfrac{1}{\sigma}AX$, alors bien sûr $AX = \sigma Y$, mézôssi $A^\top Y = \dfrac{1}{\sigma}\, A^\top AX = \sigma X$, et Y est unitaire puisque

$$\|Y\|^2 = \frac{1}{\sigma^2}\, \|AX\|^2 = \frac{1}{\sigma^2}\, (X|A^\top AX) = \frac{1}{\sigma^2}\, \sigma^2\, \|X\|^2 = 1\ .$$

(*c'est un peu un remake de la question* **7.**)

- si $\sigma = 0$, cela ne peut se produire que si A n'est pas inversible, et alors $A^\top$ ne l'est pas non plus. Il suffit alors de prendre un vecteur X unitaire dans $\mathrm{Ker}(A)$ et un vecteur Y unitaire dans $\mathrm{Ker}(A^\top)$, et les relations $A^\top Y = \sigma X (= 0)$ et $AX = \sigma Y (= 0)$ sont alors vérifiées.

11. Si X (unitaire) est vecteur singulier à droite de A pour σ, alors il est vecteur propre de $A^\top A$ pour la valeur propre σ^2. Et inversement, si X unitaire est vecteur propre de $A^\top A$ pour la valeur propre σ^2 alors, d'après **10.** ci-dessus, on peut lui associer un vecteur Y unitaire tel que (Y, X) soit un couple de vecteurs singuliers de A pour σ. Les vecteurs singuliers à droite de A pour σ sont donc les vecteurs propres unitaires de $A^\top A$ pour la valeur propre σ^2.

De la même façon, les vecteurs singuliers à gauche de A pour σ sont les vecteurs propres unitaires de $AA^\top$ pour la valeur propre σ^2.

12. Si (Y_1, X_1) et (Y_2, X_2) sont des couples de vecteurs singuliers de A, pour des valeurs singulières distinctes σ_1 et σ_2, alors X_1 et X_2 sont vecteurs propres de la matrice symétrique réelle $A^\top A$ associés à des valeurs propres distinctes σ_1^2 et σ_2^2, ils sont donc orthogonaux d'après le cours. Même chose pour Y_1 et Y_2 en considérant la matrice symétrique $AA^\top$.

13. On calcule $M = A^\top A = \begin{pmatrix} 125 & 75 \\ 75 & 125 \end{pmatrix}$. Donc $\chi_M = (X-125)^2 - (75)^2 = (X-200)(X-50)$.

Les valeurs propres de $A^\top A$ sont donc 50 et 200, les valeurs singulières de A sont les racines carrées de ces nombres, soit $\sigma_1 = 5\sqrt{2}$ et $\sigma_2 = 10\sqrt{2}$. Les vecteurs singuliers à droite de A étant les vecteurs propres unitaires de $M = A^\top A$, recherchons ces derniers, pardi! Comme $M - 50I_2 = \begin{pmatrix} 75 & 75 \\ 75 & 75 \end{pmatrix}$, un vecteur propre unitaire de M pour la valeur propre 50 est $X_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ensuite, $Y_1 = \dfrac{1}{\sigma_1}AX_1 = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -5 & -11 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Alors (Y_1, X_1) est un couple de vecteurs singuliers de A pour la valeur singulière $\sigma_1 = 5\sqrt{2}$.
Comme $M - 200I_2 = \begin{pmatrix} -75 & 75 \\ 75 & -75 \end{pmatrix}$, un vecteur propre unitaire de M pour la valeur propre 200 est $X_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ensuite, $Y_2 = \dfrac{1}{\sigma_2}AX_2 = \dfrac{1}{10\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -5 & -11 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Alors (Y_2, X_2) est un couple de vecteurs singuliers de A pour la valeur singulière $\sigma_2 = 10\sqrt{2}$.
En notant $\mathcal{B}_1$ la base orthonormale (X_1, X_2) et $\mathcal{B}_2$ la base orthonormale (Y_1, Y_2), on a alors d'après la question **7.e.** la relation $A = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_2} \cdot \Delta \cdot \left(P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1}\right)^\top$ avec $\Delta = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2)$. Cela donne l'égalité

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -11 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 10\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

que le lecteur se fera un plaisir de vérifier!

14. C'est reparti pour un tour! $M = A^\top A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $\chi_M = X(X-1)(X-3)$, donc $\mathrm{Sp}(A^\top A) = \{0, 1, 3\}$ et les valeurs singulières de A sont $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$ et $\sigma_3 = \sqrt{3}$.

Un vecteur propre unitaire de M pour la valeur propre 1 est $X_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis on pose $Y_2 = AX_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et (Y_2, X_2) est un couple de vecteurs singuliers de A pour $\sigma_2 = 1$.

Un vecteur propre unitaire de M pour la valeur propre 3 est $X_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis on pose $Y_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}AX_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, et (Y_3, X_3) est un couple de vecteurs singuliers de A pour $\sigma_3 = \sqrt{3}$.

Enfin, on prend X_1 unitaire dans $\mathrm{Ker}(A)$, comme $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et Y_1 unitaire dans $\mathrm{Ker}(A^\top)$, comme $Y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, et on a un couple de vecteurs singuliers de A pour $\sigma_1 = 0$.

On en déduit la décomposition en valeurs singulières:

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}.$$

PROBLÈME 2 *d'après Centrale PC 2023*

A. Calculs utilisant des séries entières.

1. En posant $a_n = \dbinom{2n}{n}$, on a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(2n+2)!}{\big((n+1)!\big)^2} \times \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4$, d'où un rayon de convergence R égal à $\dfrac{1}{4}$.

Pour $x \in I =]-R, R[$, posons $s(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On vient d'obtenir entre les coefficients a_n la relation $(n+1)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$. En multipliant cette relation par x^n, et en sommant ensuite pour n de 0 à l'infini (toutes les séries entières entrant en jeu ont le même rayon de convergence $R = \dfrac{1}{4}$), on obtient

$$\forall x \in I \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = 4\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\ ,$$

soit $s'(x) = 4x\, s'(x) + 2\, s(x)$, autrement dit la fonction s est solution sur l'intervalle de convergence I de l'équation différentielle linéaire du premier ordre **(E)** : $(1-4x)y' - 2y = 0$. Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $y = \dfrac{C}{\sqrt{1-4x}}$. Avec la condition initiale $s(0) = 1$, on obtient

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\qquad s(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}\ .$$

Remarque. La réponse étant donnée, on peut aussi partir de $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ et développer cette expression en série entière en utilisant le développement au programme de $(1-t)^\alpha$ pour $t \in]-1, 1[$.

2. On sait que l'on peut primitiver terme à terme la fonction somme d'une série entière sur son intervalle de convergence, on a donc

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\qquad \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^{n+1}}{n+1}\ .$$

Pour x non nul dans I, il suffit de diviser par x les deux membres de l'égalité obtenue.

3. Le lecteur averti (qui en vaut deux) aura reconnu un produit de Cauchy. En posant $a_k = \binom{2k}{k}$ et $b_k = \dfrac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$, les séries entières $\sum a_k x^k$ et $\sum b_k x^k$ ont pour rayon de convergence commun $R = \dfrac{1}{4}$ et, si l'on pose $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$, la série entière produit de Cauchy $\sum c_n x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $\dfrac{1}{4}$ et, pour tout $x \in \,]-R, R[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{+\infty} b_l x^l\right) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x\sqrt{1-4x}} = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1\right) = \frac{s(x)-1}{2x}$$

(en toute rigueur pour x non nul, mais on prolonge par continuité avec la valeur 1 en 0), en posant $s(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$ comme on l'a déjà fait dans le corrigé de **Q1.**

4. On redéveloppe le résultat obtenu ci-dessus: pour $x \in \left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[\setminus \{0\}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \frac{1}{2x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n} x^n - 1\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1} x^n\ ,$$

l'égalité entre les membres extrêmes étant valable aussi pour $x = 0$. Par unicité du développement en série entière, on déduit la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}\ .$$

5. Posons $u_n(x) = b_n x^n = \dbinom{2n}{n}\dfrac{x^n}{n+1}$ pour $x \in S = [-R, R]$, on a alors, en utilisant la formule de Stirling,

$$\|u_n\|_{\infty,S} = \frac{1}{4^n(n+1)}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\,4^n}\frac{2\sqrt{\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,n^{3/2}}$$

qui est sommable, ceci prouve la convergence normale sur le segment $S = [-R, R]$ de la série de fonctions $\sum u_n$. Les fonctions u_n étant continues, la fonction somme est alors continue sur S, et notamment continue à gauche au point $R = \dfrac{1}{4}$, d'où, en utilisant **Q2.**,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)\,4^n}\binom{2n}{n} = \lim_{x\to\left(\frac{1}{4}\right)^-}\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right) = 2\ .$$

B. Égalisations au jeu de pile ou face infini.

6. Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $A_n = \{S_{2n} = n\}$. Comme S_{2n} est une somme de $2n$ variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p, le cours de première année indique que S_{2n} suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2n, p)$. En particulier,

$$P(A_n) = P(S_{2n} = n) = \binom{2n}{n}\ p^n\ q^n\ .$$

7. Bah c'est évident, il n'y a jamais deux premières fois!

8. On a $C = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$, donc C est une réunion dénombrable d'événements, c'est aussi un événement, i.e. $C \in \mathcal{A}$. Comme cette réunion est disjointe, il résulte de la propriéte de σ-additivité d'une probabilité que $P(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n)$.

9. Clairement, on a $A_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} (B_k \cap A_n)$, puis

$$P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k \cap A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P_{B_k}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)\ P(A_{n-k})\ .$$

En effet, si l'on sait l'événement B_k réalisé (égalisation après $2k$ lancers), la probabilité (conditionnelle) d'une nouvelle égalisation après $2(n-k)$ nouveaux lancers est la même que la probabilité d'une égalisation après les $2(n-k)$ premiers lancers, soit $P_{B_k}(A_n) = P(A_{n-k})$. Ce raisonnement est valable pour $k = n$ avec la convention $A_0 = \Omega$.

10. Pour $n = 1$, on a $B_1 = \big(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 1\}\big) \sqcup \big(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 0\}\big)$, donc

$$P(B_1) = 2pq = \frac{2}{1}\ \binom{0}{0}\ (pq)^1\ ,$$

la formule est exacte pour $n = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, supposons la formule vraie pour tout rang $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comme $P(A_0) = P(\Omega) = 1$, de la relation obtenue en **Q9.**, on déduit

$$\begin{aligned}
P(B_n) &= P(A_n) - \sum_{k=1}^{n-1} P(B_k)\ P(A_{n-k}) \\
&= \binom{2n}{n}\ p^n\ q^n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k}\ \binom{2k-2}{k-1}\ p^k q^k\ \binom{2n-2k}{n-k}\ p^{n-k} q^{n-k} \\
&= (pq)^n \left[\binom{2n}{n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k}\ \binom{2k-2}{k-1}\ \binom{2n-2k}{n-k} \right] \\
&= (pq)^n \left[\binom{2n}{n} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{2}{k+1}\ \binom{2k}{k}\ \binom{2n-2k-2}{n-k-1} \right] && \textbf{(*)} \\
&= (pq)^n \left[\binom{2n}{n} - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}\ \binom{2k}{k}\ \binom{2(n-1)-2k}{(n-1)-k} + \frac{2}{n}\ \binom{2n-2}{n-1} \right] && \textbf{(**)} \\
&= (pq)^n \left[\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n} + \frac{2}{n}\ \binom{2(n-1)}{n-1} \right] && \textbf{(***)} \\
&= \frac{2}{n}\ \binom{2n-2}{n-1}\ (pq)^n\ ,
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. La récurrence est donc achevée.

Quelques commentaires sur le calcul.

(*): *translation d'indice*

(**): *on ajoute et retranche le terme d'indice* $k = n-1$

(***): *on utilise la relation obtenue en* **Q4.** *avec* n *remplacé par* $n-1$.

11. Si $p \neq \dfrac{1}{2}$ (pièce déséquilibrée), alors $pq = p(1-p) < \dfrac{1}{4}$ (*calcul classique, étudier la fonction* $p \mapsto p(1-p)$, *ou bien utiliser des identités remarquables*). Des questions **8.** et **2.**, on déduit alors que

$$P(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} (pq)^n = 2pq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} (pq)^n = 2pq \times \frac{1-\sqrt{1-4pq}}{2pq} .$$

La probabilité qu'au moins une égalisation se produise au cours de la partie est donc

$$P(C) = 1 - \sqrt{1-4pq} .$$

12. Si $p = \dfrac{1}{2}$ (pièce équilibrée), on déduit de **Q5.** que

$$P(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{2}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\,4^n} \binom{2n}{n} = \frac{S}{2} = 1 .$$

Il est presque sûr qu'au moins une égalisation se produira au cours de la partie.