DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 8
COMMENTAIRES
PSI2 2023-2024

PROBLÈME 1

1. Quelques erreurs dans l'écriture du théorème du rang, j'ai lu sur quelques copies que

$$\dim\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f)\ ,$$

j'espère qu'il s'agit d'un lapsus et que personne ne pense vraiment que f et g sont des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$!

3. Pour expliquer que c'est la même matrice diagonale qui intervient dans les deux formules, il faut dire que $A^\top A$ et $AA^\top$ ont les mêmes valeurs propres, mais aussi **avec les mêmes multiplicités**, ce qui résulte de l'égalité des polynômes caractéristiques.

7. La rédaction est parfois à améliorer, mais bon, je ne rentre pas dans les détails.

9.b. Question très classique, mais pas toujours bien traitée. En effet, il y a essentiellement deux façons de présenter les choses, qui correspondent à ce que j'avais appelé les "versions 1 et 2" du théorème spectral:

- soit on dit qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_1 = (X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de $A^\top A$ (c'est par exemple celle qui est introduite dans la question **7.a.**), mais dans ce cas un vecteur quelconque X de $\mathbb{R}^n$ a des coordonnées dans cette base, il ne s'écrit donc pas $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ mais plutôt $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$, où les α_i sont ses **coordonnées** dans la base $\mathcal{B}_1$;

- soit on dit que $\mathbb{R}^n$ est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de $A^\top A$, mais dans ce cas il n'y a pas forcément n valeurs propres distinctes, l'écriture correcte est alors $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} X_i$, où m est le nombre de valeurs propres distinctes, et les X_i sont les **composantes** du vecteur X selon la décomposition $\mathbb{R}^n = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m} E_{\lambda_i}(AA^\top)$, où λ_1, $\cdots$, λ_m sont les valeurs propres **distinctes** de $AA^\top$ (c'est-à-dire de g).

Quel que soit le choix d'écriture que vous faites, il est important ici de bien **introduire les notations que vous allez utiliser**.

10. Ici aussi, il y a eu de nombreux problèmes d'**introduction des notations**, qui sont parfois "tautologiques" (i.e. ça tourne en rond!!). Certain(e)s partent d'un vecteur X (*quelconque ? ce n'est pas clair*) et définissent un vecteur Y à partir de ce X, puis redéfinissent un vecteur X (*est-ce le même que le précédent ???*) en fonction de ce Y, bref on n'y comprend rien! **Dans la rédaction d'un travail scientifique, il est essentiel d'introduire correctement les notations utilisées!!**

PROBLÈME 2

2. Cela m'agace toujours un peu de lire que telle fonction est **LA** primitive de telle autre. Je rappelle que toute fonction continue sur un intervalle admet **une infinité** de primitives qui diffèrent entre elles d'une constante, et que beaucoup d'erreurs résultent de l'oubli de la détermination de cette constante. Pour être complet, il serait judicieux de mentionner le résultat de cours utilisé: *les primitives de la somme d'une série entière sur son intervalle de convergence peuvent s'obtenir par primitivation terme à terme.*

3. Ici aussi, écrire en toutes lettres: "**produit de Cauchy**"!

5. La formule obtenue en **Q2.** a été démontrée pour x tel que $|x| < \frac{1}{4}$. Est-elle encore valable pour $x = \frac{1}{4}$? Pour le savoir, il est nécessaire d'étudier la continuité de la fonction somme d'une série entière en une borne de son intervalle de convergence, et aucun théorème du programme ne mentionne de tel résultat de façon générale. Il faut donc se retrousser les manches et prouver la convergence normale sur $[-R, R]$, *cf.* corrigé.

6. J'aimerais bien voir mentionné quelque part que $X_1 + \cdots + X_{2n}$ suit une loi binomiale.

9. Il est faux d'écrire que $A_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} (B_k \cap A_{n-k})$, et aussi de prétendre que les événements B_k et A_{n-k} sont indépendants (*il y a des lancers de pièce communs entre B_k et A_{n-k}, bon je me comprends...*) La bonne écriture est $A_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} (B_k \cap A_n)$ puisqu'il est clair que, si A_n est réalisé, alors un et un seul des B_k $(1 \leq k \leq n)$ est réalisé, on utilise alors des probabilités conditionnelles, *cf.* corrigé.

Il est faux aussi de prétendre que la famille $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet d'événements: la question **11.** montre en effet que, si $p < \frac{1}{2}$, alors $P\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n \right) < 1$.