COLLES de MATHÉMATIQUES **PSI2 2023-2024**

Semaine 19 : du 11/03 au 15/03

Probabilités

Tout le chapitre. Il suffit de rajouter au programme précédent:

- Utilisation de la fonction génératrice pour calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, notamment X est d'espérance finie si et seulement G_X est dérivable (à gauche) au point 1.

- Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres.

Calcul différentiel

Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles premières pour $f : U \to \mathbb{R}$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors elle admet en tout point a de U un développement limité d'ordre un, définition de la différentielle de f au point a:

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a)\cdot h + o\big(\|h\|\big) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \sum_{i=1}^{p} \partial_i f(a)\, h_i + o\big(\|h\|\big) .$$

Règle de la chaîne, dérivation de $t \mapsto f\big(x_1(t), \cdots, x_p(t)\big)$, caractérisation des fonctions ($\mathcal{C}^1$) constantes sur un ouvert convexe. Application au calcul de dérivées partielles de fonctions composées, cas du "passage en coordonnées polaires".

Gradient de $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, noté ∇f. Expression du gradient en coordonnées polaires.

Dérivées partielles secondes, fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Théorème de Schwarz.

Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles d'ordre un ou deux, une indication de changement de variables étant fournie.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Formule $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$ pour X à valeurs dans $\mathbb{N}$.
- Si X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie. L'ensemble $L^2(\Omega)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Fonction génératrice d'une somme de variables indépendantes.
- Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
- Si $\mathrm{E}(X) < +\infty$ avec $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, alors G_X est dérivable en 1 et $\mathrm{E}(X) = G'_X(1)$.
- Caractérisation des fonctions constantes de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert convexe.
- Dérivées partielles de $(r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Expression du gradient en coordonnées polaires.