CORRIGÉ du DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 9
PSI2 2023-2024

PARTIE A. Préliminaires.

1.a. Pour tout t réel, on a $\operatorname{ch}(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ et $e^{t^2/2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n\, n!}$. Les rayons de convergence sont donc $+\infty$.

b. Comme $2^n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2 \leq \prod_{k=1}^{n} (n+k) = \frac{(2n)!}{n!}$, on a $\dfrac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \dfrac{t^{2n}}{2^n\, n!}$ pour tout t réel et tout n entier naturel, donc $\operatorname{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.

2.a. Soit $l = \lim\limits_{+\infty} f \in \mathbb{R}$. En écrivant la définition de la limite avec $\varepsilon = 1$, on obtient l'existence d'un réel $A \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour $t \geq A$, on ait $\big|f(t) - l\big| \leq 1$, i.e. $l - 1 \leq f(t) \leq l + 1$. Donc f est bornée sur l'intervalle $[A, +\infty[$. Comme f est continue, elle est aussi bornée sur le **segment** $[0, A]$. Elle est donc finalement bornée sur $\mathbb{R}_+$.

b. Il suffit d'appliquer le **a.** La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, par croissances comparées, elle a une limite nulle en $+\infty$, elle est donc bornée sur $\mathbb{R}_+$.

PARTIE B. Transformée de Laplace d'une variable aléatoire.

3.a. Pour $t = 0$, la variable aléatoire constante de valeur 1 admet une espérance, donc $0 \in I_X$ et $\mathcal{L}_X(0) = 1$.

Il faut montrer que I_X est une partie convexe de $\mathbb{R}$. Soient $a \in I_X$ et $b \in I_X$ avec $a < b$, montrons que $[a, b] \subset I_X$. Si $t \in [a, b]$, on peut écrire $t = (1-\lambda)a + \lambda b$ avec $\lambda \in [0, 1]$. De la convexité sur $\mathbb{R}$ de la fonction exponentielle, on déduit que, pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$0 \leq e^{(1-\lambda)aX(\omega) + \lambda bX(\omega)} \leq (1-\lambda)\, e^{aX(\omega)} + \lambda\, e^{bX(\omega)} ,$$

on a donc les inégalités entre variables aléatoires: $0 \leq e^{(1-\lambda)aX + \lambda bX} \leq (1-\lambda)\, e^{aX} + \lambda\, e^{bX}$. Comme a et b appartiennent à I_X, les variables e^{aX} et e^{bX} sont d'espérance finie, i.e. appartiennent à l'espace vectoriel $L^1(\Omega)$, il en est donc de même de la combinaison linéaire $(1-\lambda)\, e^{aX} + \lambda\, e^{bX}$. Enfin, par le théorème de comparaison, on déduit que la variable $e^{tX} = e^{\left((1-\lambda)a + \lambda b\right)X}$ est d'espérance finie, donc $t \in I_X$.

b. Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, pour $t \in I_X$, on a $\mathcal{L}_X(t) = \mathrm{E}\big((e^t)^X\big) = G_X(e^t)$. Notons que, dans ce cas (et, plus généralement, si X est à valeurs réelles positives), l'intervalle I_X contient $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$: en effet, si $X \geq 0$ et $t \leq 0$, on a $tX \leq 0$ donc $0 \leq e^{tX} \leq 1$, et e^{tX} est d'espérance finie par le théorème de comparaison.

Si X n'est pas à valeurs dans $\mathbb{N}$, il n'est pas d'usage de parler de "fonction génératrice" et, même s'il est possible de définir $\mathrm{E}(t^X)$ pour certaines valeurs de t, on n'a plus alors une série entière.

4.a. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $X \geq 0$ et $\mathrm{E}\big(e^{tX}\big) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{tn} P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda e^t)^n}{n!}$ (par le théorème du transfert) si cette série converge... et c'est toujours le cas puisqu'on a reconnu une série exponentielle. Donc $I_X = \mathbb{R}$ et $\mathcal{L}_X(t) = \mathrm{E}\big(e^{tX}\big) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$ pour tout t réel.

b. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $\mathcal{L}_X(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{nt} p q^{n-1} = p\, e^t \sum_{n=0}^{+\infty} (qe^t)^n$ en cas de convergence, où l'on a posé $q = 1 - p$. On reconnaît une série géométrique de raison qe^t qui converge si et seulement si $qe^t < 1$, i.e. si et seulement si $t < -\ln(q)$. Donc $I_X = \big]-\infty, -\ln(q)\big[$ et, pour $t \in I_X$, on a

$$\mathcal{L}_X(t) = \mathrm{E}\big(e^{tX}\big) = p\, e^t \sum_{n=0}^{+\infty} (qe^t)^n = \frac{p\, e^t}{1 - qe^t} .$$

c. Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors on travaille sur des sommes finies (l'ensemble image $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ est fini), il n'y a donc aucun problème de convergence, et $I_X = \mathbb{R}$, puis

$$\mathcal{L}_X(t) = \mathrm{E}\big(e^{tX}\big) = \sum_{k=0}^{n} e^{kt} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (pe^t + q)^n \quad \text{avec} \quad q = 1-p\ .$$

d. Si $X \sim \mathcal{Z}(x)$ avec $x > 1$ (loi zéta de paramètre x), alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = \dfrac{1}{n^x\, \zeta(x)}$. Alors $\mathcal{L}_X(t) = \dfrac{1}{\zeta(x)} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{nt}}{n^x}$ en cas de convergence de cette série. En posant $a_n = \dfrac{e^{nt}}{n^x}$, on a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = e^t \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^t$. La règle de d'Alembert permet de conclure à la convergence si $t < 0$ et à la divergence si $t > 0$. D'autre part, pour $t = 0$, la série converge et a pour somme 1 (*cf.* **3.a.**). Donc $I_X = \mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$.

PARTIE C. Majoration de $\mathcal{L}_X(t)$ pour une variable centrée à valeurs dans $[-1,1]$.

5. La fonction g_a est dérivable deux fois sur $[-1,1]$ avec $g_a''(x) = -(\ln a)^2\, a^x < 0$, donc g_a est concave sur $\mathbb{R}$. Comme $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, sur le segment $[-1,1]$, elle est "au-dessus de sa sécante", i.e. elle prend des valeurs positives.

6. Il suffit d'appliquer la question **5.** avec $a = e^t > 1$.

7.a. Si $X(\Omega) \subset [-1,1]$, on a $|X| \leq 1$, donc pour tout t réel, $tX \leq |tX| \leq |t|$ puis $0 \leq e^{tX} \leq e^{|t|}$. Or, la variable aléatoire constante $e^{|t|}$ est d'espérance finie donc, par comparaison, e^{tX} est d'espérance finie. On a donc $I_X = \mathbb{R}$. Si k est un entier naturel non nul, on a $|X^k| \leq 1$, donc X^k est d'espérance finie pour les mêmes raisons.

b. De l'inégalité de la question **6.**, on déduit, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, l'inégalité entre variables aléatoires

$$e^{tX} \leq e^{-t}\, \frac{1-X}{2} + e^t\, \frac{1+X}{2} = \mathrm{ch}(t) + \mathrm{sh}(t) \cdot X\ .$$

Par linéarité et croissance de l'espérance, on déduit

$$\mathcal{L}_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) \leq \mathrm{E}\big(\mathrm{ch}(t) + \mathrm{sh}(t)\cdot X\big) = \mathrm{ch}(t) + \mathrm{sh}(t)\ \mathrm{E}(X) = \mathrm{ch}(t)\ .$$

De la question **1.b.**, on déduit enfin la majoration demandée $\mathcal{L}_X(t) \leq e^{t^2/2}$ pour $t > 0$.

Enfin, pour $t = 0$, l'inégalité demandée est triviale puisque $\mathcal{L}_X(0) = 1$. Et, si $t < 0$, en appliquant ce que l'on vient de démontrer en remplaçant t par $-t$ (qui est alors strictement positif) et X par $-X$ (qui est aussi centrée et à valeurs dans $[-1,1]$), on obtient que $\mathcal{L}_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) = \mathrm{E}(e^{(-t)(-X)}) = \mathcal{L}_{-X}(-t) \leq e^{(-t)^2/2} = e^{t^2/2}$.

PARTIE D. La loi forte des grands nombres dans un cas particulier.

8. Par croissance stricte de la fonction exponentielle, il est clair que l'événement $\{S_n \geq \varepsilon\}$ coïncide avec l'événement $\left\{e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}\right\}$ pour $t > 0$ et $n > 0$. La variable aléatoire $Y = e^{tnS_n}$ est positive et bornée (car $-1 \leq S_n \leq 1$, donc $0 \leq Y \leq e^{nt}$), elle est donc d'espérance finie. On peut donc lui appliquer l'inégalité de Markov: pour tout $a > 0$, on a $P(Y \geq a) \leq \dfrac{\mathrm{E}(Y)}{a}$.

Or, $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(e^{tnS_n}) = \mathrm{E}\left(\prod_{k=1}^{n} e^{tX_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{E}(e^{tX_k})$ car les variables X_k, $(1 \leq k \leq n)$, sont mutuellement indépendantes et il en est donc de même des variables e^{tX_k}, $(1 \leq k \leq n)$ d'après les propriétés rappelées en préambule. Mais les X_k ayant toutes la même loi que X, les e^{tX_k} ont alors la même loi que e^{tX} et $\mathrm{E}(e^{tX_k}) = \mathcal{L}_X(t)$ pour tout k. Avec $a = e^{tn\varepsilon}$, on obtient donc

$$P(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}) \leq \big(\mathcal{L}_X(t)\big)^n \, e^{-tn\varepsilon} .$$

9. La fonction exponentielle étant strictement croissante, il suffit d'étudier les variations de $f_\varepsilon : t \mapsto -nt\varepsilon + n\dfrac{t^2}{2}$. On a $f_\varepsilon'(t) = n(t-\varepsilon)$, donc f_ε (et aussi $g_\varepsilon = \exp\circ f_\varepsilon$) est décroissante sur $]-\infty, \varepsilon]$ et croissante sur $[\varepsilon, +\infty[$. La fonction $g_\varepsilon : t \mapsto e^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$ est donc minimale pour $t = \varepsilon$ et sa valeur minimale est $g_\varepsilon(\varepsilon) = e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$.

Des questions **7.b.** et **8.**, on déduit que, pour tous $t > 0$ et $\varepsilon > 0$, on a

$$P(S_n \geq \varepsilon) \leq \left(e^{\frac{t^2}{2}}\right)^n e^{-tn\varepsilon} = g_\varepsilon(t) = e^{-nt\varepsilon + nt^2/2} .$$

En particulier, en choisissant $t = \varepsilon$, on a $P(S_n \geq \varepsilon) \leq g_\varepsilon(\varepsilon) = e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$.

En remplaçant les variables X_k par leurs opposées $-X_k$ (qui sont aussi mutuellement indépendantes, de même loi que $-X$, qui est aussi centrée à valeurs dans $[-1, 1]$), on obtient la majoration $P(-S_n \geq \varepsilon) = P(S_n \leq -\varepsilon) \leq e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$.

Enfin, $\big\{|S_n| \geq \varepsilon\big\} = \{S_n \geq \varepsilon\} \cup \{S_n \leq -\varepsilon\}$, donc $P\big(|S_n| \geq \varepsilon\big) \leq 2\, e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$.

10. La série géométrique $\sum e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$ converge, et on a

$$P\big(|S_n| > \varepsilon\big) \leq P\big(|S_n| \geq \varepsilon\big) \leq 2\, e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}} ,$$

donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum P\big(|S_n| > \varepsilon\big)$ est convergente.

11. On a donc $B_n(\varepsilon) = \bigcup_{k=n}^{+\infty} \big\{|S_k| > \varepsilon\big\}$. Par sous-additivité, $P\big(B_n(\varepsilon)\big) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P\big(|S_k| > \varepsilon\big)$.

Or, le reste d'ordre n d'une série convergente tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Par encadrement, on a donc $\lim_{n\to+\infty} P\big(B_n(\varepsilon)\big) = 0$.

Ensuite, on a $B(\varepsilon) \subset B_n(\varepsilon)$ pour tout n, donc par croissance d'une probabilité, on a $0 \leq P\big(B(\varepsilon)\big) \leq P\big(B_n(\varepsilon)\big)$ pour tout n. De $\lim_{n\to+\infty} P\big(B_n(\varepsilon)\big) = 0$, on déduit $P\big(B(\varepsilon)\big) = 0$, cet événement est négligeable.

12. Soit $\omega \in \Omega$. On a les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} S_n(\omega) = 0 \quad &\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \geq N \quad \big|S_n(\omega)\big| \leq \varepsilon \\
&\iff \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \geq N \quad \big|S_n(\omega)\big| \leq \frac{1}{p} \\
&\iff \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \quad \omega \in \bigcap_{n\geq N} \Big\{|S_n| \leq \frac{1}{p}\Big\}.
\end{aligned}$$

Mais $\displaystyle\bigcap_{n\geq N}\left\{|S_n|\leq\frac{1}{p}\right\}=\bigcap_{n\geq N}\overline{\left\{|S_n|>\frac{1}{p}\right\}}=\overline{\bigcup_{n\geq N}\left\{|S_n|>\frac{1}{p}\right\}}=\overline{B_N\Big(\frac{1}{p}\Big)}$. Reprenons...

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}S_n(\omega)=0\quad&\Longleftrightarrow\quad\forall p\in\mathbb{N}^*\quad\exists N\in\mathbb{N}^*\quad\omega\in\overline{B_N\Big(\frac{1}{p}\Big)}\\&\Longleftrightarrow\quad\forall p\in\mathbb{N}^*\quad\omega\in\bigcup_{N\in\mathbb{N}^*}\overline{B_N\Big(\frac{1}{p}\Big)}\\&\Longleftrightarrow\quad\forall p\in\mathbb{N}^*\quad\omega\in\overline{\bigcap_{N\in\mathbb{N}^*}B_N\Big(\frac{1}{p}\Big)}\;=\;\overline{B\Big(\frac{1}{p}\Big)}\\&\Longleftrightarrow\quad\omega\in\bigcap_{p\in\mathbb{N}^*}\overline{B\Big(\frac{1}{p}\Big)}\;=\;\overline{\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}B\Big(\frac{1}{p}\Big)}.\end{aligned}$$

L'identité $A=\overline{\displaystyle\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}B\Big(\frac{1}{p}\Big)}$ est donc prouvée.

13. Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, on a $P\left(B\Big(\frac{1}{p}\Big)\right)=0$ d'après la question **11.** Par sous-additivité, on déduit que $P(\overline{A})=P\left(\displaystyle\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}B\Big(\frac{1}{p}\Big)\right)=0$. *Une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.* Par passage au complémentaire, on a $P(A)=1$.

PARTIE E. Fonction génératrice des moments.

14. Si $t\in[-\alpha,\alpha]$, on a $tX\leq|tX|\leq\alpha|X|$, donc $0\leq e^{tX}\leq e^{\alpha|X|}$. Du théorème de comparaison, comme on sait que $e^{\alpha|X|}$ est d'espérance finie, on en déduit que e^{tX} est d'espérance finie, donc que $t\in I_X$. Ainsi, $[-\alpha,\alpha]\subset I_X$.

15. Soit $k\in\mathbb{N}^*$, la fonction $g:x\mapsto x^k e^{-\alpha x}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ d'après **2.b.** Il existe donc un réel positif M tel que $|x|^k\,e^{-\alpha|x|}\leq M$ pour tout x réel, on peut donc écrire $\left|X^k\right|\leq M\,e^{\alpha|X|}$. De nouveau par le théorème de comparaison, on déduit que X^k est d'espérance finie, donc X admet un moment d'ordre k.

16. Soit $X(\Omega)=\{x_n\ ;\ n\in\mathbb{N}\}$ une énumération de l'ensemble-image, posons $p_n=P(X=x_n)$ pour tout n, ce sont des réels positifs dont la somme vaut 1. Par hypothèse, $e^{\alpha|X|}$ est d'espérance finie, c'est-à-dire la série $\sum p_n\,e^{\alpha|x_n|}$ est convergente ("absolument", mais elle est à termes positifs). Pour $t\in[-\alpha,\alpha]$, on a $\mathcal{L}_X(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(t)$, en posant $u_n(t)=p_n\,e^{tx_n}$.

Les fonctions u_n sont continues sur $[-\alpha,\alpha]$, et on a $\left|u_n(t)\right|=u_n(t)\leq p_n\,e^{|tx_n|}\leq p_n\,e^{\alpha|x_n|}$ sur cet intervalle, ce qui montre la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[-\alpha,\alpha]$. La fonction somme $\mathcal{L}_X$ est alors continue sur ce segment.

17. Soit β un réel tel que $0<\beta<\alpha$. On va montrer que, pour tout k entier naturel, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n^{(k)}$ converge normalement sur le segment $S=[-\beta,\beta]$.

En effet, on a $u_n^{(k)}(t)=p_n\,x_n^k\,e^{tx_n}$, donc pour $t\in S$,

$$\left|u_n^{(k)}(t)\right| = p_n\,|x_n|^k\,e^{tx_n} \leq p_n\,|x_n|^k\,e^{|tx_n|} \leq p_n\,|x_n|^k\,e^{\beta|x_n|} = p_n\,|x_n|^k\,e^{-(\alpha-\beta)|x_n|}\,e^{\alpha|x_n|}\ .$$

Or, d'après **2.b.** de nouveau, la fonction $x \mapsto x^k e^{-(\alpha-\beta)x}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, donc il existe un réel positif M' tel que $\left|u_n^{(k)}(t)\right| \leq M'\,p_n\,e^{\alpha|x_n|}$ qui est le terme général d'une série convergente (indépendante de la variable t).

Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur S, et on vient de prouver, pour tout k entier naturel, la convergence normale, donc uniforme, de la série des dérivées k-ièmes $\sum_n u_n^{(k)}$.

Le théorème de dérivation des séries de fonctions (extension aux fonctions $\mathcal{C}^\infty$) s'applique, la fonction somme $\mathcal{L}_X$ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout segment inclus dans $]-\alpha,\alpha[$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-\alpha,\alpha[$.

18. Le théorème de dérivation des séries de fonctions nous autorise alors à dériver terme à terme pour obtenir

$$\forall t \in]-\alpha,\alpha[\qquad \mathcal{L}_X^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\,x_n^k\,e^{tx_n} = \mathrm{E}(X^k\,e^{tX})\ ,$$

la dernière égalité résultant de la formule du transfert.

En particulier, $\mathcal{L}_X^{(k)}(0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^k\,P(X = x_n) = \mathrm{E}(X^k)$.

On retrouve ainsi le moment d'ordre k de la variable X.