COLLES de MATHÉMATIQUES **PSI2 2023-2024**

Semaine 20 : du 18/03 au 22/03

Calcul différentiel

Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles premières pour $f : U \to \mathbb{R}$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors elle admet en tout point a de U un développement limité d'ordre un, définition de la différentielle de f au point a:

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a)\cdot h + o\big(\|h\|\big) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \sum_{i=1}^{p} \partial_i f(a)\, h_i + o\big(\|h\|\big)\ .$$

Règle de la chaîne, dérivation de $t \mapsto f\big(x_1(t), \cdots, x_p(t)\big)$, caractérisation des fonctions ($\mathcal{C}^1$) constantes sur un ouvert convexe. Application au calcul de dérivées partielles de fonctions composées, cas du “passage en coordonnées polaires”.

Gradient de $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, noté ∇f. Expression du gradient en coordonnées polaires.

Dérivées partielles secondes, fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Théorème de Schwarz.

Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles d'ordre un ou deux, une indication de changement de variables étant fournie.

Matrice hessienne en un point d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, développement limité d'ordre deux

$$f(a+h) = f(a) + \big(\nabla f(a) \bigm| h\big) + \frac{1}{2}\, h^\top \cdot H_f(a)\cdot h + o\big(\|h\|^2\big)\ .$$

Notion d'extremum global, d'extremum local. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (avec U ouvert), si f admet un extremum local en un point a de U, alors a est un point critique de f, i.e. $\mathrm{d}f(a) = 0$, i.e. $\nabla f(a) = 0$. Réciproque fausse. Recherche d'extremum global en utilisant le théorème des bornes atteintes sur un fermé borné.

Conditions d'ordre deux utilisant la matrice hessienne, en un point critique de $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$:

- si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors il y a un minimum local strict ;
- si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^{+}(\mathbb{R})$, alors il n'y a pas de minimum local.

Espaces euclidiens orientés

Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, automorphismes directs ou indirects.

Produit mixte de n vecteurs dans un espace euclidien orienté de dimension n. Propriétés.

Produit vectoriel dans un espace euclidien orienté de dimension trois. Propriétés, notamment formule du double produit vectoriel et identité de Lagrange. Application à l'obtention de bases orthonormales directes.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Caractérisation des fonctions constantes de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert convexe.
- Dérivées partielles de $(r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Expression du gradient en coordonnées polaires.
- Si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ avec a point critique de f de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, alors il y a un minimum en a.
- Identité de Lagrange $\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - (u|v)^2$ dans E euclidien orienté de dimension 3.