DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 9
COMMENTAIRES
PSI2 2023-2024

Ce sujet, composé à partir de l'épreuve CCINP 2018 PSI et de je ne sais plus quel problème de Centrale, comportait des passages assez techniques qui ont souvent été mal traités, notamment à cause d'un manque d'aisance dans la gestion des signes et des valeurs absolues!

1.b. Tout repose sur l'inégalité $2^n\, n! \leq (2n)!$, qu'il seriat bien de justifier (*ce n'est pas bien difficile!*).

2.a. Il faut ici exploiter correctement l'existence d'une limite finie en $+\infty$, en disant par exemple qu'il existe un "voisinage de $+\infty$" (i.e. un intervalle de la forme $[A, +\infty[$) sur lequel f est bornée, puis appliquer le théorème des bornes atteintes sur $[0, A]$. Pour ce dernier point, les mots "**continue**" et "**segment**" doivent impérativement figurer sur votre copie!

3.a. Les ennuis commencent ici pour beaucoup! Si u et v sont dans I_X et si $u \leq t \leq v$, on ne peut écrire $uX \leq tX \leq vX$ que si X est à valeurs positives!

Certains ont alors eu l'idée d'une disjonction de cas:

- si X est à valeurs positives ;

- si X est à valeurs négatives.

Mais cela ne résout pas complètement le problème! Que faire en effet si X n'est pas de signe constant ??? Mon corrigé propose une solution utilisant la convexité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. Une autre solution, vue sur certaines bonnes copies, est de majorer e^{tX} par $e^{uX} + e^{vX}$.

5. Une étude des variations de g_a est possible, il est toutefois plus facile d'exploiter sa concavité.

7.a. Ici encore, la variable X n'étant pas à valeurs positives, la gestion des signes et des valeurs absolues est souvent incorrecte. Le corrigé donne une réponse qui me semble très rapide. Pour montrer par exemple que X admet un moment d'ordre k, il suffit par exemple d'écrire que $|X^k| \leq 1$ et d'appliquer le théorème de comparaison: si Y est d'espérance finie et si $|X| \leq Y$, alors X est d'espérance finie.

10. Il serait bien vu de mentionner que vous reconnaissez dans $\sum e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$ une série géométrique.

Affirmer que le terme général est négligeable devant $\dfrac{1}{n^2}$ n'est bien sûr pas faux, mais un peu saugrenu dans ce contexte!

11. Quelques copies (heureusement rares) parlent ici d'événements indépendants pour dire que la probabilité de l'intersection est le produit des probabilités, mais cet argument est faux, les événements $B_n(\varepsilon)$ n'ont aucune raison d'être indépendants!

14. Encore une question (proche de la question **7.a.**) demandant de manipuler correctement les valeurs absolues, en n'oubliant pas que la variable X n'est pas supposée à valeurs positives.

16. et 17. Il s'agit ici d'appliquer les théorèmes de continuité et de dérivabilité des sommes de séries de fonctions, après avoir écrit $\mathcal{L}_X(t)$ sous forme d'une somme de série. Il ne s'agit pas ici directement d'une série entière, certaines copies sont assez fumeuses sur ce sujet.