EXERCICES sur les ESPACES PRÉHILBERTIENS et EUCLIDIENS
PSI2 2023-2024

Produit scalaire, norme associée, orthogonalité

1. Soit E un espace préhilbertien réel. Soient f et g deux applications de E vers E telles que

$$\forall (x,y)\in E^2 \qquad \big(x|f(y)\big)=\big(g(x)|y\big)\ .$$

Montrer que f et g sont des endomorphismes de E.

- -

Soient x_1, x_2, y des vecteurs de E, soient a et b des réels ; alors

$$\begin{aligned}\big(g(ax_1+bx_2)|y\big) &= \big(ax_1+bx_2|f(y)\big)=a\,\big(x_1|f(y)\big)+b\,\big(x_2|f(y)\big)\\ &= a\,\big(g(x_1)|y\big)+b\,\big(g(x_2)|y\big)\\ &= \big(a\,g(x_1)+b\,g(x_2)|y\big)\ .\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout vecteur y de E, on déduit $g(ax_1+bx_2)=a\,g(x_1)+b\,g(x_2)$, donc g est linéaire. On procède de même pour montrer la linéarité de f.

---

2. Soit $E=\mathcal{C}^1\big([0,1],\mathrm{I\!R}\big)$. Pour $f\in E$ et $g\in E$, on pose

$$<f,g>=\int_0^1 f'(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t+f(1)\,g(0)+f(0)\,g(1)\ .$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

- -

La bilinéarité et la symétrie sont évidentes. Pour le caractère défini positif, il faut penser à Mrs. Cauchy & Schwarz, qui nous disent notamment que $\left(\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\leq\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\begin{aligned}<f,f> &= \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t+2\,f(0)\,f(1)\\ &\geq \left(\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2+2\,f(0)\,f(1)\ =\ \big(f(1)-f(0)\big)^2+2\,f(0)\,f(1)\\ &= f(0)^2+f(1)^2\ \geq\ 0\ .\end{aligned}$$

La forme est donc positive et, si $<f,f>=0$, alors $f(0)^2+f(1)^2=0$, donc $f(0)=f(1)=0$, mais on a aussi dans ce cas $\displaystyle\int_0^1 f'(t)^2\mathrm{d}t=0$, d'où $f'=0$ par le théorème de stricte positivité, puis $f=0$ d'où le caractère défini.

---

3. Soient a et b deux vecteurs unitaires dans un espace préhilbertien réel E. Pour tout vecteur x non nul de E, on pose $\varphi(x)=\dfrac{(x|a)(x|b)}{\|x\|^2}$. Exprimer $\varphi(x)$ à l'aide des vecteurs $u=a+b$ et $v=a-b$. Déterminer les réels

$$m=\min_{x\in E\setminus\{0\}}\varphi(x)\qquad\text{et}\qquad M=\max_{x\in E\setminus\{0\}}\varphi(x)\ .$$

- -

Notons que $(u|v)=\|a\|^2-\|b\|^2=0$: les vecteurs u et v sont orthogonaux. Avec $a=\dfrac{u+v}{2}$ et $b=\dfrac{u-v}{2}$, on obtient

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\} \qquad \varphi(x) = \frac{1}{4}\ \frac{(x|u+v)\ (x|u-v)}{\|x\|^2} = \frac{1}{4}\ \frac{(x|u)^2 - (x|v)^2}{\|x\|^2}\ .$$

Donc $\varphi(x) \leq \dfrac{(x|u)^2}{4\,\|x\|^2} \leq \dfrac{1}{4}\,\|u\|^2$ (cette dernière inégalité par Cauchy-Schwarz). Comme u et v sont orthogonaux, on a $\varphi(u) = \dfrac{(u|u)^2}{4\,\|u\|^2} = \dfrac{\|u\|^2}{4}$, donc

$$M = \max_{x\in E\setminus\{0\}} \varphi(x) = \frac{\|u\|^2}{4} = \frac{1}{4}\,\big(\|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\,(a|b)\big) = \frac{1+(a|b)}{2}\ .$$

De même, $\varphi(x) \geq -\dfrac{(x|v)^2}{4\,\|x\|^2} \geq -\dfrac{\|v\|^2}{4}$, et $\varphi(v) = -\dfrac{\|v\|^2}{4}$, donc

$$m = \min_{x\in E\setminus\{0\}} \varphi(x) = -\frac{\|v\|^2}{4} = -\frac{1}{4}\,\big(\|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\,(a|b)\big) = \frac{(a|b)-1}{2}\ .$$

---

4. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Comparer les rangs des matrices A et $A^\top A$. *On pourra s'intéresser aux noyaux des applications linéaires canoniquement associées à ces matrices.*

- -

Les matrices A et $A^\top A$ ont le même noyau. En effet, A représente canoniquement une application linéaire de $\mathbb{R}^q$ vers $\mathbb{R}^p$, alors que $A^\top A$ représente un endomorphisme de $\mathbb{R}^q$. Et, si $X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^q$ appartient au noyau de A, alors $AX = 0$ donc $A^\top AX = 0$, ainsi $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^\top A)$. Réciproquement, si $X \in \mathrm{Ker}(A^\top A)$, alors $A^\top AX = 0$, puis $X^\top A^\top AX = 0$, soit $(AX)^\top (AX) = 0$, ou encore $\|AX\|^2 = 0$, le symbole $\|\cdot\|$ représentant la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^p$, donc $AX = 0$ et $X \in \mathrm{Ker}(A)$.

On a ainsi prouvé que $\mathrm{Ker}(A^\top A) = \mathrm{Ker}(A)$.

Enfin, les applications linéaires canoniquement associées aux matrices A et $A^\top A$ ayant toutes deux pour espace de départ $\mathbb{R}^q$, le théorème du rang donne

$$\mathrm{rg}(A^\top A) = q - \dim\big(\mathrm{Ker}(A^\top A)\big) = q - \dim\big(\mathrm{Ker}(A)\big) = \mathrm{rg}(A)\ .$$

---

5. Soit $E = \mathcal{C}\big([-1,1],\mathbb{R}\big)$ muni du produit scalaire

$$< f,g >= \int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

On considère les sous-espaces

$$F = \{f \in E \mid \forall x \in [0,1] \quad f(x) = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{f \in E \mid \forall x \in [-1,0] \quad f(x) = 0\}\ .$$

a. Montrer que les sous-espaces F et G sont orthogonaux.

b. A-t-on $E = F \oplus G$?

c. Montrer que $F^\perp = G$.

- -

a. Si $f \in F$ et $g \in G$, alors le produit fg est nul sur $[-1,1]$, donc $< f, g >= 0$.

b. L'orthogonalité des sous-espaces entraîne $F \cap G = \{0\}$ (ils sont en somme directe). En revanche, $F + G \neq E$: en effet, si $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$, alors $h(0) = 0$. La fonction constante de valeur 1, par exemple, est un élément de E qui n'appartient pas à $F + G$. En fait, si l'on considère l'hyperplan $H = \big\{h \in E \mid h(0) = 0\big\}$, on peut montrer que $F \oplus G = H$. En effet, on vient d'expliquer l'inclusion $F + G \subset H$. Et réciproquement, si $h \in H$, alors $h = f + g$, où f et g sont définies par

$$\forall x \in [-1,1] \qquad f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in [-1,0] \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1,0] \\ h(x) & \text{si } x \in [0,1] \end{cases} .$$

On vérifie facilement que f et g sont continues sur $[-1,1]$, puis $f \in F$ et $g \in G$.

c. L'orthogonalité des sous-espaces F et G se traduit par $G \subset F^\perp$ (ou, de façon symétrique, $F \subset G^\perp$).

Soit $g \in F^\perp$, on doit montrer que $g \in G$, i.e. g est nulle sur $[-1,0]$. Introduisons la fonction $u : [-1,1] \to \mathbb{R}$, nulle sur $[0,1]$, et telle que $u(t) = -t\, g(t)$ pour $t \in [-1,0[$. Alors $\lim\limits_{t \to 0^-} u(t) = 0 = u(0)$, donc u est continue sur $[-1,1]$ et $u \in F$. Comme $g \in F^\perp$, on a

$$0 =< g, u >= \int_{-1}^{1} u(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-t)\, g(t)^2\, \mathrm{d}t .$$

Comme la fonction $t \mapsto -t\, g(t)^2$ est continue et positive sur $[-1,0]$, on en déduit qu'elle est nulle sur ce segment, donc $g \in G$. On a donc montré l'autre inclusion $F^\perp \subset G$.

Remarque. Vu la symétrie, on a bien sûr aussi $G^\perp = F$. On a donc construit, dans un espace préhilbertien E, un exemple de sous-espace F tel que $(F^\perp)^\perp = F$, mais pourtant $F \oplus F^\perp \neq E$.

6*. Soit E un espace préhilbertien réel, soient $x_1, \cdots, x_n$ des vecteurs de E. On suppose qu'il existe un réel positif M tel que

$$\forall (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n \qquad \Big\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k \Big\| \leq M .$$

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \leq M^2$.

- -

On va faire une récurrence sur n. On va prouver pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}_n$:

$\ll$Pour tout réel positif M, pour tout n-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ de vecteurs de E tels que $\forall (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n \quad \Big\| \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k \Big\| \leq M$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \leq M^2$. $\gg$

- Pour $n = 1$, l'assertion $\mathcal{P}_1$ est évidente!
- Pour $n = 2$, elle résulte de l'identité du parallélogramme

$$\|x_1 + x_2\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2 = 2\big(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2\big) .$$

• Soit $n \geq 3$, supposons $\mathcal{P}_{n-1}$ vraie, soit alors $M \geq 0$, soient $x_1, \cdots, x_n$ des vecteurs de E tels que $\forall (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n \quad \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k \right\| \leq M$. Fixons $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}) \in \{-1,1\}^{n-1}$ et posons $y_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k x_k$ et $y_2 = x_n$, on a alors $\forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \{-1,1\}^2 \quad \left\| \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \right\| \leq M$; la propriété $\mathcal{P}_2$ étant vraie, on en déduit que $\|\alpha_1\|^2 + \|\alpha_2\|^2 \leq M^2$. On a donc prouvé que $\forall (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}) \in \{-1,1\}^{n-1} \quad \left\| \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k x_k \right\| \leq \sqrt{M^2 - \|x_n\|^2}$ et, la propriété $(\mathcal{P}_{n-1})$ étant supposée vraie, on en déduit que $\sum_{k=1}^{n-1} \|x_k\|^2 \leq M^2 - \|x_n\|^2$, ce qui achève la récurrence.

Familles orthogonales ou orthonormales

7. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P,Q) \in E^2$, on pose $(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$.

a. Montrer que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur l'espace vectoriel E.

b. Calculer $(X^p|X^q)$ pour p et q entiers naturels.

c. Orthonormaliser la famille $(1, X, X^2)$ pour ce produit scalaire.

- -

a. Tout d'abord, l'intégrale ci-dessus converge: en effet, si le polynôme PQ est non nul, soit $a_d X^d$ son terme dominant avec $d \in \mathbb{N}$ et $a_d \in \mathbb{R}^*$, on a alors

$$t^2\, P(t)\, Q(t)\, e^{-t} \underset{t \to +\infty}{\sim} a_d\, t^{d+2}\, e^{-t} \quad \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

par croissances comparées, donc $P(t)\, Q(t)\, e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ lorsque $t \to +\infty$, ce qui garantit l'intégrabilité de cette fonction continue sur $[0, +\infty[$.

Ensuite, on a bien un produit scalaire: La bilinéarité et la symétrie sont évidentes, et on a $(P|P) = \int_0^{+\infty} P(t)^2\, e^{-t}\, \mathrm{d}t \geq 0$. Comme la fonction $t \mapsto P(t)^2\, e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, on déduit du théorème de stricte positivité que $(P|P)$ est nul si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad P(t)^2\, e^{-t} = 0$, ce qui entraîne que $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad P(t) = 0$, ce qui entraîne enfin que le polynôme P admet une infinité de racines, donc est le polynôme nul. On a obtenu le caractère défini positif.

b. Posons $I_n = \int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ pour tout n entier naturel. Un calcul classique, par une intégration par parties, donne $I_0 = 1$ puis $I_n = nI_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $I_n = n!$ pour tout n entier naturel.

Ensuite, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $(X^p|X^q) = I_{p+q} = (p+q)!$

c. Notons $\mathcal{E} = (E_0, E_1, E_2)$ l'orthonormalisée de la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

• D'abord, $\|1\|^2 = (1|1) = I_0 = 1$, le polynôme constant est donc unitaire (dans le sens "de norme 1"). On pose donc $E_0 = 1$.

• Ensuite, $(E_0|X) = (1|X) = 1$, donc $V_1 = X - (E_0|X)\,E_0 = X - 1$, qu'il reste à "normer". On calcule

$$\|X-1\|^2 = (X-1|X-1) = (X|X) - 2\cdot(1|X) + (1|1) = 2 - 2 + 1 = 1 ,$$

donc $E_1 = \dfrac{V_1}{\|V_1\|} = V_1 = X - 1$.

• Enfin, $(E_0|X^2) = (1|X^2) = 2$ et $(E_1|X^2) = (X|X^2) - (1|X^2) = 6 - 2 = 4$, donc

$$V_2 = X^2 - (E_0|X^2)\,E_0 - (E_1|X^2)\,E_1 = X^2 - 2 - 4(X-1) = X^2 - 4X + 2 ,$$

puis $\|V_2\|^2 = 4$ (*y'a un petit calcul*), donc $E_2 = \dfrac{V_2}{\|V_2\|} = \dfrac{V_2}{2} = \dfrac{1}{2}(X^2 - 4X + 2)$.

---

8. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel E, telle que $\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$. Montrer que cette famille est orthogonale, puis que c'est une base orthonormale de E.

- -

Fixons un indice $j \in [\![1, n]\!]$, on a alors

$$1 = \|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_j|e_i)^2 = 1 + \sum_{i \neq j} (e_j|e_i)^2 ;$$

les $(e_j|e_i)^2$, avec $i \neq j$, étant tous positifs, on en déduit qu'ils sont nuls. La famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est donc orthogonale, et finalement orthonormale.

La famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est libre car orthonormale, il reste à prouver qu'elle est génératrice. Et cela résulte du cas d'égalité de l'inégalité de Bessel. Explicitons! Soit le sous-espace $V = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$, il s'agit de prouver que $V = E$. Or, si $x \in E$, d'après le cours, le projeté orthogonal de x sur V a pour expression $p_V(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (e_i|x) e_i$ et on a alors $\big\|p_V(x)\big\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (e_i|x)^2$, soit $\big\|p_V(x)\big\|^2 = \|x\|^2$ vu l'hypothèse. Mais la relation de Pythagore donne aussi $\|x\|^2 = \big\|p_V(x)\big\|^2 + \big\|x - p_V(x)\big\|^2$. On a donc ici $\big\|x - p_V(x)\big\| = 0$, donc $x = p_V(x) \in V$. Ainsi, $E \subset V$, donc $V = E$.

9.a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad T_n(\cos\theta) = \cos n\theta .$$

On pourra procéder par récurrence, après avoir transformé en produit l'expression $\cos(n+2)x + \cos nx$.

b. Pour $(P, Q) \in \big(\mathbb{R}[X]\big)^2$, on pose

$$(P|Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\ .$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Montrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale dans cet espace préhilbertien. En déduire une famille orthonormale. Peut-on parler de "base orthonormale" de $\mathbb{R}[X]$?

- -

a. Pour l'unicité, si deux polynômes T_n et U_n vérifient la relation **(1)**, on a alors $\forall\theta \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos\theta) = U_n(\cos\theta)$, donc $\forall x \in [-1,1] \quad T_n(x) = U_n(x)$. Les fonctions polynomiales associées aux polynômes T_n et U_n coïncidant sur l'ensemble infini $[-1,1]$, on en déduit l'égalité des polynômes T_n et U_n.

Pour l'existence, on peut, soit utiliser la formule de Moivre et la formule du binôme, soit procéder par récurrence sur n (ce qui est plus simple et a l'avantage de fournir la relation de récurrence $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$).

La propriété à démontrer (existence de T_n) est vraie pour $n = 0$, $n = 1$, avec $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$.

Supposons-la vraie aux rangs n et $n+1$, n étant un entier naturel donné. En utilisant les formules de transformation de sommes en produits, nous avons

$$\cos(n+2)\theta + \cos n\theta = 2\cos(n+1)\theta\cos\theta\ ,$$

soit

$$\cos(n+2)\theta = 2\cos(n+1)\theta\ \cos\theta - \cos n\theta\ .$$

Or, par hypothèse, il existe des polynômes T_n et T_{n+1} tels que $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$ et $\cos(n+1)\theta = T_{n+1}(\cos\theta)$. Nous en déduisons l'existence d'un polynôme T_{n+2} tel que $\cos(n+2)\theta = T_{n+2}(\cos\theta)$ et la relation de récurrence

$$T_{n+2}(x) = 2x\, T_{n+1}(x) - T_n(x)\ .$$

Nous obtenons ainsi $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $\cdots$; on vérifie facilement par une récurrence ("double") que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme T_n est de degré n et que, si $n \geq 1$, son coefficient dominant est 2^{n-1}. Les polynômes T_n sont appelés **polynômes de Tchebychev de première espèce**.

b. La première chose à vérifier est l'existence de l'intégrale définissant $(P|Q)$. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est définie et continue sur $]-1,1[$. Au voisinage du point 1, en posant $x = 1-h$ ($h \to 0^+$), on a $f(x) = f(1-h) = \dfrac{P(1-h)Q(1-h)}{\sqrt{2h-h^2}}$; le numérateur est borné et $\dfrac{1}{\sqrt{2h-h^2}} \underset{h\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2h}}$, fonction intégrable sur $]0,a]$ pour tout $a > 0$. En procédant de même au voisinage de -1, on justifie l'intégrabilité de la fonction f sur $]-1,1[$.

La bilinéarité et la symétrie de l'application $(P,Q) \mapsto (P|Q)$ sont immédiates, de même que sa positivité : $(P|P) \geq 0$ pour tout P. Enfin, si $(P|P) = 0$, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(x)^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, l'intégrande étant une fonction continue, positive et intégrable sur $]-1,1[$, on déduit alors du théorème de stricte positivité que cette fonction est nulle sur $]-1,1[$, donc le polynôme P est le polynôme nul puisqu'il admet une infinité de racines.

Nous avons donc un produit scalaire, et $\mathbb{R}[X]$ est ainsi muni d'une structure d'espace préhilbertien réel.

En faisant le changement de variable $x=\cos\theta$ (ou, plus précisément, $\theta=\mathrm{Arccos}\,x$), on a, pour tous polynômes P et Q,

$$(P|Q)=\int_{\pi}^{0}\frac{P(\cos\theta)\,Q(\cos\theta)}{\sin\theta}\,(-\sin\theta)\,d\theta=\int_0^{\pi}P(\cos\theta)\,Q(\cos\theta)\,d\theta\ .$$

Si p et q sont deux entiers naturels, nous avons donc

$$(T_p|T_q)=\int_0^{\pi}\cos(p\theta)\ \cos(q\theta)\ \mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi}\cos(p+q)\theta\ \mathrm{d}\theta+\int_0^{\pi}\cos(p-q)\theta\ \mathrm{d}\theta\right)\ .$$

Or,

- pour tout $k\in\mathbf{Z}^*$, $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos k\theta\ \mathrm{d}\theta=\left[\frac{1}{k}\ \sin k\theta\right]_0^{\pi}=0$;

- pour $k=0$, $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos k\theta\ \mathrm{d}\theta=\pi$.

Il en résulte que, si $p\neq q$, $(T_p|T_q)=0$: la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

De plus,

$$\|T_0\|^2=(T_0|T_0)=\pi\qquad\text{et}\qquad\forall k\in\mathbb{N}^*\quad\|T_k\|^2=(T_k|T_k)=\frac{\pi}{2}\ .$$

En posant $P_0=\dfrac{T_0}{\sqrt{\pi}}$ et $P_k=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,T_k$ pour $k\in\mathbb{N}^*$, la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale.

Remarque. De la relation de récurrence obtenue en **a.**, on déduit facilement, par récurrence, que $\deg(T_n)=n$ pour tout n. Il en résulte que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la famille $(P_0,\ldots,P_n)$ est une base orthonormale du sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$. La famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est enfin une base de $\mathbb{R}[X]$ car elle est libre (i.e. toute sous-famille finie est libre car orthonormale) et génératrice (tout polynôme, si l'on note d son degré, est combinaison linéaire de P_0, P_1, $\cdots$, P_d).

10*. Soit E un espace euclidien, soit u un endomorphisme de E, de trace nulle.

a. Montrer qu'il existe un vecteur x non nul de E tel que $\big(u(x)|x\big)=0$.

b. Montrer qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls. *On pourra raisonner par récurrence sur la dimension de E.*

- -

a. Soit $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ une base orthonormale de E, on a alors $\mathrm{tr}(u)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\big(u(\varepsilon_i)|\varepsilon_i\big)=0$.

Si tous les termes de cette somme sont nuls, alors $x=\varepsilon_i$ convient, pour n'importe quel $i\in[\![1,n]\!]$.

Sinon, comme la somme est nulle, il existe deux indices i et j distincts tels que $\big(u(\varepsilon_i)|\varepsilon_i\big)>0$ et $\big(u(\varepsilon_j)|\varepsilon_j\big)<0$. L'application $f:t\mapsto\Big(u\big((1-t)\varepsilon_i+t\varepsilon_j\ \big)\big|(1-t)\varepsilon_i+t\varepsilon_j\Big)$ est continue sur $[0,1]$, cela résulte notamment de la continuité des applications linéaires (l'endomorphisme

u) et bilinéaires (le produit scalaire) en dimension finie. Comme $f(0) > 0$ et $f(1) < 0$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in]0,1[$ tel que $f(t_0) = 0$. Le vecteur $x = (1-t_0)\varepsilon_i + t_0\varepsilon_j$ convient alors (il est non nul car ε_i et ε_j ne sont pas colinéaires).

b. Initialisation évidente: si $n = \dim(E) = 1$, si $\mathrm{tr}(u) = 0$, alors u est l'endomorphisme nul.

Soit $n \geq 2$, supposons la propriété vraie dans tout espace euclidien de dimension $n-1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E euclidien de dimension n. La question **a.** permet d'obtenir un vecteur unitaire e_1 de E tel que $\big(u(e_1)|e_1\big) = 0$. Soit $D = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $H = D^\perp$. Si $\mathcal{C} = (e_2, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale de H, alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(u) = 0$. Notons v l'endomorphisme de H tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(v) = A$, on a alors $\mathrm{tr}(v) = \mathrm{tr}(A) = 0$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe alors une base orthonormale $\mathcal{C}' = (e'_2, \cdots, e'_n)$ de H telle que les coefficients diagonaux de la matrice $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(v)$ soient tous nuls. La famille $\mathcal{B}' = (e_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ est alors une base orthonormale de E, et la matrice M' de u dans cette base a tous ses coefficients diagonaux nuls. En effet, soit $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ dans E. Comme le premier vecteur e_1 est inchangé et que $\mathrm{Vect}(e'_2, \cdots, e'_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n) = H$, cette matrice est de la forme $P = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & Q \end{pmatrix}$ avec $Q = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$. Un calcul par blocs montre que

$$M' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & LQ \\ Q^{-1}C & A' \end{pmatrix} .$$

Les coefficients diagonaux de M', qui sont 0 et les coefficients diagonaux de A', sont donc nuls.

Projecteurs orthogonaux

11. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $I(a,b) = \displaystyle\int_0^\pi (a\sin x + b\cos x - x)^2\,\mathrm{d}x$. Déterminer le minimum de $I(a,b)$ lorsque (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$.

- -

Soit $E = \mathcal{C}\big([0,\pi],\mathbb{R}\big)$, muni du produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_{[0,\pi]} fg$. Soient les fonctions

$$e : x \mapsto x \quad ; \quad s : x \mapsto \sin x \quad ; \quad c : x \mapsto \cos x .$$

Alors $I(a,b) = \|e - (a\,s + b\,c)\|^2$ et, si l'on note P le plan vectoriel $P = \mathrm{Vect}(s,c)$, alors

$$m := \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} I(a,b) = d(e,P)^2 = \|e\|^2 - \|p_P(e)\|^2 ,$$

en notant p_P le projecteur orthogonal sur le plan P. D'autre part, si $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base orthonormale du plan P, on a

$$p_P(e) = (\varepsilon_1|e)\,\varepsilon_1 + (\varepsilon_2|e)\,\varepsilon_2 \qquad \text{et} \qquad \|p_P(e)\|^2 = (\varepsilon_1|e)^2 + (\varepsilon_2|e)^2 .$$

La famille (s,c) est orthogonale puisque $(s|c)=\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,\cos x\,\mathrm{d}x=0$, il suffit donc de normer ces “vecteurs” pour avoir une base orthonormale du plan P. Or, $\|s\|^2=\|c\|^2=\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi \cos^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, on posera donc $\varepsilon_1=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,s$ et $\varepsilon_2=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,c$. On achève l'exerfife par quelques calculs d'intégrales :

$$(\varepsilon_1|e)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi x\sin x\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}\quad;\quad(\varepsilon_2|e)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi x\cos x\mathrm{d}x=-2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\quad;\quad\|e\|^2=\int_0^\pi x^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^3}{3}\;;$$

enfin,

$$m=\|e\|^2-(\varepsilon_1|e)^2-(\varepsilon_2|e)^2=\frac{\pi^3}{3}-2\pi-\frac{8}{\pi}\;.$$

---

12. L'espace vectoriel $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire $(A|B)=\mathrm{tr}(A^\top B)$. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, soit $\mathcal{H}$ l'hyperplan constitué des matrices de trace nulle. Déterminer la distance $d(J,\mathcal{H})$.

- -

L'hyperplan $\mathcal{H}$ est constitué des matrices M telles que $\mathrm{tr}(I_n^\top M)=0$, autrement dit telles que $(I_n|M)=0$. L'orthogonal de l'hyperplan $\mathcal{H}$ est donc la droite vectorielle $D=\mathrm{Vect}(I_n)$ constituée des “matrices scalaires”. Autrement dit, un “vecteur” unitaire normal à cet hyperplan $\mathcal{H}$ est la matrice $N=\dfrac{I_n}{\|I_n\|}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,I_n$. On en déduit, d'après le cours, que

$$d(J,\mathcal{H})=\big\|p_D(J)\big\|=\big\|(N|J)\,N\big\|=\big|(N|J)\big|=\frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{tr}(J)=\sqrt{n}\;.$$

---

13. Soit p un projecteur dans un espace euclidien E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x\in E\quad \|p(x)\|\le\|x\|$.

- -

Posons $F=\mathrm{Im}\,p$ et $G=\mathrm{Ker}\,p$. On a alors $E=F\oplus G$, et p est le projecteur sur F parallèlement à G. Dire que p est un projecteur orthogonal signifie que $G=F^\perp$.

• Si p est un projecteur orthogonal, on a $\|p(x)\|\le\|x\|$ pour tout x de E, c'est du cours, c'est l'**inégalité de Bessel**. Sa preuve est simple: on écrit $x=p(x)+\big(x-p(x)\big)$, avec $p(x)\in F$ et $x-p(x)\in G=F^\perp$, ces deux vecteurs sont donc orthogonaux et la relation de Pythagore donne $\|x\|^2=\|p(x)\|^2+\|x-p(x)\|^2\ge\|p(x)\|^2$.

• Si p vérifie la relation $\|p(x)\|\le\|x\|$ pour tout x, choisissons x appartenant à $G^\perp$. Comme $p(x)-x\in G=\mathrm{Ker}\,p$, ces deux vecteurs sont orthogonaux et de nouveau Pythagore nous donne

$$\|p(x)\|^2=\Big\|x+\big(p(x)-x\big)\Big\|^2=\|x\|^2+\|p(x)-x\|^2\;.$$

L'hypothèse $\|p(x)\|\le\|x\|$ entraîne alors que $\|p(x)-x\|^2\le 0$, ce qui n'est possible que si $p(x)-x=0_E$, c'est-à-dire si $x\in F$. On a ainsi prouvé l'inclusion $G^\perp\subset F$. Comme $G^\perp$ et F

sont tous deux des supplémentaires de G, on a d'autre part égalité des dimensions, donc $G^\perp = F$, puis $(G^\perp)^\perp = F^\perp$, soit $G = F^\perp$, ce qu'il fallait démontrer.

---

14. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Écrire la matrice A (relativement à la base canonique) du projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel F défini par les équations

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}.$$

- -

Le sous-espace F est un plan, que l'on peut définir plus simplement par le système équivalent $\begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$. Une base de ce plan est $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, avec $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Mais nous avons besoin d'une base orthonormale de F pour pouvoir exprimer le projeté orthogonal d'un vecteur $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont déjà orthogonaux, il sufiit donc de les normer : en posant $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{\overrightarrow{u}}{\sqrt{2}}$ et $\overrightarrow{e_2} = \dfrac{\overrightarrow{v}}{\sqrt{2}}$, nous disposons d'une base orthonormale $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ du plan F. Nous avons alors

$$\begin{aligned} p_F(\overrightarrow{X}) &= \left(\overrightarrow{e_1}|\overrightarrow{X}\right)\overrightarrow{e_1} + \left(\overrightarrow{e_2}|\overrightarrow{X}\right)\overrightarrow{e_2} \\ &= \frac{x-z}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{y-t}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-z \\ y-t \\ z-x \\ t-y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice du projecteur p_F est alors $A = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

---

15. L'espace $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique défini par la relation $(A|B) = \mathrm{tr}(A^\top B) = \displaystyle\sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j}$. Soit $M = (m_{i,j}) \in E$. Calculer la distance de la matrice M au sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.

- -

L'orthogonal dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques : en effet, il est classique que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ils sont de plus orthogonaux puisque, si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors

$$(A|S) = \mathrm{tr}(A^\top S) = \mathrm{tr}(-A\,S) = -\mathrm{tr}(A\,S)\ ,$$

mais aussi

$$(A|S) = (S|A) = \mathrm{tr}(S^\top A) = \mathrm{tr}(SA) = \mathrm{tr}(AS) = -(A|S)\ ,$$

finalement $(A|S) = 0$. La distance de la matrice M au sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est la distance de M à son projeté orthogonal sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la distance à son projeté sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ suivant la direction de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Autrement dit, si M se décompose en $M = S + A$ avec $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors $d\big(M, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big) = \|A\|$. Or, il est classique (sinon, procéder par analyse-synthèse) que $S = \dfrac{1}{2}\big(M + M^\top\big)$ et $A = \dfrac{1}{2}\big(M - M^\top\big)$, donc

$$d\big(M, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big) = \frac{1}{2}\,\|M - M^\top\| = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i,j}(m_{i,j} - m_{j,i})^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\ \sum_{i<j}(m_{i,j} - m_{j,i})^2}\ .$$

---

16. Soit E un espace euclidien de dimension n, soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E, soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur orthogonal de rang r.

a. Montrer que $\forall x \in E \quad \|p(x)\|^2 = \big(p(x)|x\big)$.

b. Calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2$.

- -

a. Il suffit de décomposer x en $x = p(x) + q(x)$, avec $q(x) = x - p(x) \in \mathrm{Ker}\,p = \big(\mathrm{Im}\,p\big)^\perp$, alors

$$\big(p(x)|x\big) = \big(p(x)|p(x) + q(x)\big) = \big(p(x)|p(x)\big) + \big(p(x)|q(x)\big) = \|p(x)\|^2$$

puisque les vecteurs $p(x)$ et $q(x)$ sont orthogonaux.

b. Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \big(e_i|p(e_i)\big) = \mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p) = r$ puisque la trace d'un projecteur est égale à son rang.

---

17. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien E. Prouver l'équivalence

$$\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q) \iff \forall x \in E \quad \big\|p(x)\big\| \leq \big\|q(x)\big\|\ .$$

- -

• Supposons $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q)$. Soient r et s les dimensions de $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(q)$, alors $0 \leq r \leq s \leq n = \dim(E)$. Soit $(e_1, \cdots, e_r)$ une base orthonormale de $\mathrm{Im}(p)$, c'est alors une famille orthonormale dans $\mathrm{Im}(q)$, on peut donc la compléter en une base orthonormale $(e_1, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots, e_s)$ de $\mathrm{Im}(q)$. Si x est un vecteur quelconque de E, on a alors $p(x) = \sum_{i=1}^{r} (e_i|x)e_i$ et $q(x) = \sum_{i=1}^{s} (e_i|x)e_i$, puis

$$\|p(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{r} (e_i|x)^2 \leq \sum_{i=1}^{s} (e_i|x)^2 = \|q(x)\|^2 ,$$

donc $\|p(x)\| \leq \|q(x)\|$.

• Supposons $\forall x \in E \quad \|p(x)\| \leq \|q(x)\|$. Si l'inclusion $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q)$ était fausse, il existerait un vecteur x appartenant à $\mathrm{Im}(p)$ mais pas à $\mathrm{Im}(q)$. On aurait alors $p(x) = x$ mais $\|q(x)\| < \|x\|$ (le cas d'égalité dans l'inégalité de Bessel n'étant pas vérifié), donc $\|q(x)\| < \|p(x)\|$, ce qui est une contradiction. Ainsi, $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q)$.

Isométries. Matrices orthogonales.

18. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice que l'on suppose à la fois orthogonale et triangulaire supérieure. Montrer que A est diagonale et que ses coefficients diagonaux valent 1 ou -1.

- -

Rappel : une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si $A^\top A = I_n$, c'est-à-dire :

- sur chaque colonne, la somme des carrés des coefficients vaut 1 ;

- la somme des produits deux à deux des coefficients de deux colonnes distinctes est nulle.

D'autre part, A étant triangulaire supérieure, on a $a_{i,j} = 0$ dès que $i > j$. Ainsi, sur la première colonne, on a $a_{1,1}^2 = 1$, d'où $a_{1,1} \in \{-1; 1\}$. En faisant le produit scalaire des deux premières colonnes, on a $a_{1,1}a_{1,2} = 0$, donc $a_{1,2} = 0$ puisque le coefficient diagonal $a_{1,1}$ est non nul. Il reste alors, sur la deuxième colonne, $a_{2,2}^2 = 1$ donc $a_{2,2} \in \{-1; 1\}$. On montre ainsi, par récurrence finie sur $j \in [\![1, n]\!]$, que la j-ième colonne C_j de la matrice A vaut $\pm E_j$, où E_j désigne le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Les détails sont laissés à l'improbable lecteur.

19.a. Soit E un espace euclidien. Soit $\mathcal{B}$ une base de E, soit $\mathcal{E}$ son orthonormalisée. Montrer que la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux strictement positifs.

b. En déduire que, si A est une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors il existe une matrice orthogonale Q et une matrice triangulaire supérieure R à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $A = QR$. En utilisant éventuellement l'exercice **18.** ci-dessus, montrer l'unicité de cette "décomposition QR".

- -

a. Notons $\mathcal{B} = (x_1, \cdots, x_n)$ et $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$. Soit $P = (a_{i,j}) = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ la matrice de passage considérée. Pour tout couple (i, j), le coefficient $a_{i,j}$ est la i-ème coordonnée dans la base $\mathcal{E}$

du vecteur x_j, donc $a_{i,j} = (e_i|x_j)$ (*coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale*). D'après le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on a, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, les deux conditions

(1) : $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_j) = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_j)$;

(2) : $(e_j|x_j) \in \mathbb{R}_+^*$.

La condition **(2)** exprime exactement que les coefficients diagonaux $a_{i,i}$ sont strictement positifs. La condition **(1)** entraîne que, pour tout j, le vecteur x_j appartient au sous-espace engendré par les e_i, avec $i \leq j$, autrement dit les coefficients $a_{i,j}$ avec $i > j$ sont nuls, et la matrice P est triangulaire supérieure.

b. Notons $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (muni de sa structure euclidienne canonique). La matrice A étant supposée inversible, on peut la voir comme matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ vers une certaine base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ (qui est en fait la famille des vecteurs-colonnes de A). Notons enfin $\mathcal{E}$ l'orthonormalisée de $\mathcal{B}$. On a alors la relation "de Chasles"

$$P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{E}} \cdot P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} \ , \quad \text{soit} \quad A = QR \ ,$$

où $Q = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{E}}$ est orthogonale puisque c'est la matrice de passage d'une base orthonormale vers une base orthonormale, et $R = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux strictement positifs d'après la question **a.**

Remarque. On peut en fait montrer l'unicité d'une telle écriture : en effet, supposons $A = Q_1R_1 = Q_2R_2$, avec Q_1 et Q_2 orthogonales, R_1 et R_2 triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs. On a alors $Q_2^{-1}Q_1 = R_2R_1^{-1}$. Or, la structure de groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ fait que $Q_2^{-1}Q_1$ est orthogonale. On peut montrer que l'ensemble $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs est aussi un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (*i.e. stable par produit et par passage à l'inverse*), donc $R_2R_1^{-1} \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$. L'exercice **18.** ci-dessus permet alors de déduire que $R_2R_1^{-1} = Q_2^{-1}Q_1 = I_n$, et donc $R_1 = R_2$ et $Q_1 = Q_2$.

20*. Déterminer les matrices orthogonales de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

- -

Soit $A = (a_{i,j})$ une telle matrice.

Si j et k sont deux indices distincts dans $[\![1, n]\!]$, alors les colonnes C_j et C_k sont orthogonales, i.e. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,k} = 0$. Mais les termes de cette somme étant tous positifs, ils sont donc tous nuls. On a donc obtenu

$$\textbf{(*)} \qquad \forall (i, j, k) \in [\![1, n]\!]^3 \qquad j \neq k \Longrightarrow a_{i,j}a_{i,k} = 0 \ .$$

On en déduit que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la i-ème ligne comporte exactement un coefficient non nul. En effet, elle en comporte au moins sinon la matrice A ne serait pas inversible. Si $j_0 \in [\![1, n]\!]$ est tel que $a_{i,j_0} \neq 0$, alors la relation **(*)** entraîne que tous les autres coefficients de la ligne i sont nuls. Ce coefficient a_{i,j_0} vaut nécessairement 1 puisqu'il doit être positif et que chaque ligne est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$.

On peut maintenant définir une application $\sigma : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ telle que, pour tout i, le seul coefficient non nul de la i-ème ligne soit $a_{i,\sigma(i)}$. Cette application est injective puisque, si l'on avait $\sigma(i)=\sigma(i')$ avec $i \neq i'$, alors la colonne numéro $\sigma(i)$ comporterait deux coefficients non nuls, ce qui est aussi impossible (même raisonnement que celui fait sur les lignes). Elle est donc bijective, et c'est une permutation de l'ensemble $[\![1,n]\!]$.

Les matrices ainsi obtenues sont appelées **matrices de permutation** et elles sont bien sûr au nombre de $n!$. Réciproquement, il est immédiat que ces matrices conviennent.

---

21. Soit $A=(a_{i,j}) \in \mathrm{O}(n)$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i,j} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$ et $\displaystyle\Big|\sum_{i,j} a_{i,j}\Big| \leq n$. *On pourra utiliser le vecteur* $U=(1,1,\cdots,1)$ *de* $\mathbb{R}^n$.

- -

Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique : si $X=(x_1,\cdots,x_n)$ et $Y=(y_1,\cdots,y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on a alors $|(X|Y)| \leq \|X\|\,\|Y\|$, ou encore $\displaystyle\Big|\sum_{i=1}^n x_i y_i\Big| \leq \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big)^{1/2}$. En particulier, si on prend pour Y le vecteur $U=(1,\cdots,1)$, on obtient $\displaystyle\Big|\sum_{i=1}^n x_i\Big| \leq \sqrt{n}\,\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}$.
Et si l'on remplace le vecteur X par le vecteur $X'=(|x_1|,\cdots,|x_n|)$, on obtient $\displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sqrt{n}\,\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}$, ou encore $\|X\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|X\|_2$ (*normes usuelles sur* $\mathbb{R}^n$).

Notons $C_1,\cdots,C_n$ les vecteurs-colonnes de la matrice A, ainsi $C_j=(a_{1,j},\cdots,a_{n,j}) \in \mathbb{R}^n$; la matrice A étant orthogonale, on sait que la somme des carrés des coefficients de chaque colonne vaut 1, autrement dit $\|C_j\|_2=1$ pour tout j, donc par Cauchy-Schwarz, on a $\|C_j\|_1 \leq \sqrt{n}$, d'où

$$\sum_{i,j}|a_{i,j}| = \sum_{j=1}^n\Big(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|\Big) = \sum_{j=1}^n \|C_j\|_1 \leq n\,\sqrt{n}\ .$$

D'autre part, posons $V=(v_1,\cdots,v_n)=AU$, on vérifie que $\displaystyle v_i=\sum_{j=1}^n a_{i,j}$: la i-ième coordonnée du vecteur V est la somme des coefficients de la i-ième ligne de la matrice A. On a, toujours par Cauchy-Schwarz,

$$\Big|\sum_{i,j} a_{i,j}\Big| = \Big|\sum_{i=1}^n v_i\Big| \leq \sqrt{n}\,\Big(\sum_{i=1}^n v_i^2\Big)^{1/2} = \sqrt{n}\,\|V\|_2\ .$$

Or, $\|V\|_2=\|AU\|_2=\|U\|_2=\sqrt{n}$: en effet, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A est orthogonal, donc conserve la norme (euclidienne) des vecteurs, ou encore, plus formellement,

$$\|V\|_2^2 = V^\top V = (AU)^\top\,(AU) = U^\top A^\top A U = U^\top U = \|U\|_2^2$$

puisque $A^\top A=I_n$. On en déduit la deuxième inégalité demandée.

---

22. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$, où E est un espace euclidien.

a. Montrer que $\big(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)\big)^{\perp} = \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)$.

b. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère l'endomorphisme $r_k = \dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} u^j$. Soit x un vecteur de E.

Déterminer $\lim\limits_{k \to +\infty} r_k(x)$.

- -

Dans tout l'exercice, on posera $F = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)$.

a. Soient $x \in F$ et $y \in G$; alors $u(x) = x$ et il existe $z \in E$ tel que $y = u(z) - z$. Alors

$$(x|y) = \big(x|u(z) - z\big) = \big(x|u(z)\big) - (x|z) = \big(u(x)|u(z)\big) - (x|z) = 0$$

puisque u est un automorphisme orthogonal, donc conserve le produit scalaire. On a donc montré que les sous-espaces F et G sont orthogonaux, ce qui signifie par exemple que $G \subset F^{\perp}$. Mais on sait que $F^{\perp}$ est un supplémentaire de F, donc $\dim(F^{\perp}) = \dim E - \dim F$, et on a aussi $\dim G = \dim E - \dim F$ par le théorème du rang. Finalement, $G = F^{\perp}$, ce qu'il fallait démontrer.

b. Soit $x \in E$, on le décompose en $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G = F^{\perp}$. Alors $u(y) = y$, donc par récurrence immédiate, $u^j(y) = y$ pour tout j, puis $r_k(y) = y$ pour tout entier k. D'autre part, il existe $z' \in E$ tel que $z = u(z') - z'$, alors $u^j(z) = u^{j+1}(z') - u^j(z')$ et

$$r_k(z) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} u^j(z) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \big(u^{j+1}(z') - u^j(z')\big) = \frac{1}{k} \Big(u^k(z') - z'\Big)$$

(somme télescopique). Comme $u \in \mathrm{O}(E)$ conserve la norme, on a

$$\|r_k(z)\| = \frac{1}{k} \, \big\|u^k(z') - z'\big\| \leq \frac{1}{k} \, \Big(\|u^k(z')\| + \|z'\|\Big) = \frac{2}{k} \, \|z'\| \quad \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \quad 0 \, ,$$

donc $\lim\limits_{k \to +\infty} r_k(z) = 0_E$. Finalement, $\lim\limits_{k \to +\infty} r_k(x) = y = p_F(x)$. Dans l'espace vectoriel E, la suite $\big(r_k(x)\big)$ converge vers le vecteur $p_F(x)$, projeté orthogonal de x sur $F = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$.

---

23. Soit E un espace euclidien, soient H et K deux hyperplans vectoriels de E, de vecteurs normaux unitaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ respectivement. On note s la réflexion d'hyperplan H, t la réflexion d'hyperplan K. À quelle condition a-t-on $s \circ t = t \circ s$? Interpréter alors géométriquement la transformation composée $f = t \circ s$.

- -

Traitons l'exercice de façon algébrique : on a $s(x) = x - 2(x|u)\,u$, c'est une formule du cours, de même $t(x) = x - 2(x|v)\,v$, donc, pour tout $x \in E$, on a

$$(s \circ t)(x) = x - 2(x|u)\,u - 2(x|v)\,v + 4(x|v)\,(u|v)\,u$$

et

$$(t \circ s)(x) = x - 2(x|u)\,u - 2(x|v)\,v + 4(x|u)\,(u|v)\,v \, .$$

Donc $s \circ t = t \circ s \iff \forall x \in E \quad (u|v)\,\big((x|u)\,v - (x|v)\,u\big) = 0$. Cela se produit :

- si $(u|v) = 0$, alors H et K sont des hyperplans **perpendiculaires** ; dans ce cas,

$$(s \circ t)(x) = (t \circ s)(x) = x - 2(x|u)\,u - 2(x|v)\,v\ :$$

on reconnaît (*allez, un petit effort!*) l'expression de la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace $H\ \cap\ K = \big(\mathrm{Vect}(u,v)\big)^{\perp}$ de dimension $n-2$;

- si $(u|v) \neq 0$ et $\forall x \in E \quad (x|u)\,v = (x|v)\,u$, mais cette condition entraîne en particulier $v = (u|v)\,u$, donc u et v colinéaires et finalement $u = \pm v$ et $H = K$: dans ce cas, $s = t$ et $s \circ t = s^2 = \mathrm{id}_E$.

Matrices et endomorphismes symétriques. Théorème spectral.

24. Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M\ (M^\top M)^2 = I_n$.

- -

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M\ (M^\top M)^2 = I_n$. Alors M est inversible et son inverse $M^{-1} = (M^\top M)^2 = M^\top M M^\top M$ est symétrique, donc M aussi est symétrique, autrement dit $M^\top = M$. L'hypothèse donne alors $M^5 = I_n$. D'après le théorème spectral, M est alors diagonalisable ; si λ est valeur propre de M, alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda^5 = 1$, donc $\lambda = 1$. Finalement, $M = I_n$ (matrice diagonalisable ayant 1 pour seule valeur propre). Réciproquement, $M = I_n$ convient.

---

25. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^2 = A^T$.

a. Donner un polynôme annulateur de A.

b. On suppose que $0 \in \mathrm{Sp}(A)$. Déterminer alors $\mathrm{Sp}(A)$. Montrer que A est semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec une matrice de passage orthogonale.

- -

a. On a $A^4 = (A^\top)^2 = (A^\top)^\top = A$, donc $P = X^4 - X$ est un polynôme annulateur de A.

b. Comme $P = X(X^3-1) = X(X-1)(X-j)(X-j^2)$, on déduit que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ (P étant, sur $\mathbb{C}$, scindé à racines simples) avec $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0,1,j,j^2\}$. En notant a, b, c, d les multiplicités respectives des valeurs propres 0, 1, j et j^2, on a d'abord $a = 1$ ($a \neq 0$ car $0 \in \mathrm{Sp}\,A$, $a \neq 2$ car $A \neq 0$), et $c = d$ (valeurs propres conjuguées d'une matrice à coefficients réels). Donc $c = d = 0$ sinon la somme des multiplicités dépasserait 2, puis $b = 1$. Ainsi, considérée comme matrice complexe, A est semblable à la matrice diagonale D, autrement dit $A = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Mézalor, comme $D^2 = D$, on déduit $A^2 = A$ soit $A = A^\top$, la matrice A est symétrique réelle, on peut donc la diagonaliser avec une matrice de passage orthogonale réelle.

---

26. Soit E un espace euclidien, soit u un endomorphisme symétrique de E, de valeurs propres (distinctes) $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, rangées dans l'ordre croissant ($\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m$). Pour tout $i \in [\![1,m]\!]$, notons E_i le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i.

a. Montrer que $\forall x \in E \quad \lambda_1\|x\|^2 \leq \big(u(x)|x\big) \leq \lambda_m\|x\|^2$.

b. Pour quels vecteurs x l'une des deux inégalités ci-dessus est-elle une égalité ?

c. Soit M une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $S = \dfrac{1}{2}\,(M + M^\top)$. On note α (resp. β) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de S. Montrer que toutes les valeurs propres réelles de M appartiennent à l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Qu'en déduit-on lorsque M est antisymétrique ?

- -

a. D'après le théorème spectral, u est diagonalisable donc $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m} E_i$ et on sait aussi que les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux, ce que l'on peut écrire $E = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_2 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_m$ (c'est une somme directe orthogonale). Soit $x \in E$, on le décompose suivant cette somme directe : $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i$, on a alors $u(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$, puis $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \|x_i\|^2$ (relation de Pythagore car les x_i constituent une famille orthogonale) et

$$\big(u(x)|x\big) = \Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \mid \sum_{j=1}^{m} x_j\Big) = \sum_{i,j} \lambda_i (x_i|x_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \|x_i\|^2 \; .$$

Donc $\big(u(x)|x\big) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \|x_i\|^2 \geq \sum_{i=1}^{m} \lambda_1 \|x_i\|^2 = \lambda_1 \sum_{i=1}^{m} \|x_i\|^2 = \lambda_1 \|x\|^2$; on obtient de même $\big(u(x)|x\big) \leq \lambda_m \|x\|^2$.

b. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
\big(u(x)|x\big) = \lambda_1 \|x\|^2 \quad &\iff \quad \sum_{i=2}^{m} (\lambda_i - \lambda_1) \|x_i\|^2 = 0 \\
&\iff \quad \forall i \in [\![2, m]\!] \quad (\lambda_i - \lambda_1) \|x_i\|^2 = 0 \qquad \textbf{(*)} \\
&\iff \quad \forall i \in [\![2, m]\!] \quad \|x_i\|^2 = 0 \\
&\iff \quad x \in E_1
\end{aligned}$$

(*) car une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul. De même,

$$\big(u(x)|x\big) = \lambda_m \|x\|^2 \iff x \in E_m \; .$$

c. Soit λ une valeur propre réelle de M, soit $X \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé : $X \neq 0$ et $MX = \lambda X$. La matrice S est symétrique réelle, donc représente canoniquement un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^n$, la question **a.** montre alors que $\alpha \|X\|^2 \leq (SX|X) \leq \beta \|X\|^2$, où $(\cdot|\cdot)$ représente le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ défini par $(X|Y) = X^\top Y$. On a donc

$$\alpha\, X^\top X \leq X^\top\, S\, X \leq \beta\, X^\top X \; .$$

D'autre part, $X^\top\, S\, X = \dfrac{1}{2}\,\big(X^\top\, M\, X + X^\top\, M^\top\, X\big) = \dfrac{1}{2}\,\big(X^\top\,(\lambda X) + (\lambda X)^\top\, X\big) = \lambda\, X^\top X$.

On a finalement $\alpha\, X^\top X \leq \lambda\, X^\top X \leq \beta\, X^\top X$, avec $X^\top X = \|X\|^2 > 0$, d'où $\lambda \in [\alpha, \beta]$.

Si M est antisymétrique, alors $S = \dfrac{1}{2}\,(M + M^\top) = 0_n$, donc $\alpha = \beta = 0$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \{0\}$. La seule valeur propre réelle possible pour une matrice antisymétrique réelle est donc 0.

27. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice-colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$X^\top X = n \qquad \text{et} \qquad X^\top AX = \mathrm{tr}(A)\ .$$

Indication. Considérer l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice $M = \dfrac{1}{2}(A + A^\top)$.

- -

La matrice M est symétrique réelle, donc l'endomorphisme u est autoadjoint (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$). Notons $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres, les valeurs propres associées étant $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n$. Le vecteur $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n e_i$ vérifie $\|x\|^2 = X^\top X = n$ (où X est la matrice-colonne représentant canoniquement le vecteur x), et

$$X^\top MX = \big(u(x)|x\big) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \;\middle|\; \sum_{j=1}^n e_j\right) = \sum_{i,j} \lambda_i (e_i|e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \mathrm{tr}(M)\ .$$

Mais, par linéarité de la trace, $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(A)$; d'autre part, le scalaire $X^\top AX$ est égal à son transposé, donc

$$X^\top MX = \frac{1}{2}\left(X^\top AX + X^\top A^\top X\right) = \frac{1}{2}\left(X^\top AX + (X^\top AX)^\top\right) = X^\top AX\ .$$

La matrice-colonne X convient donc.

28. Soit A une matrice symétrique réelle. Montrer que

$$\big(\mathrm{tr}(A)\big)^2 \leq \mathrm{tr}(A^2)\cdot \mathrm{rg}(A)\ .$$

- -

La matrice A est diagonalisable d'après le théorème spectral. Son rang r est aussi le nombre de valeurs propres non nulles (comptées avec leurs multiplicités respectives), notons donc $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de A. Alors $\mathrm{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^r \lambda_i$ et $\mathrm{tr}(A^2) = \displaystyle\sum_{i=1}^r \lambda_i^2$. Nous devons donc prouver que

$$\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i\right)^2 \leq r\ \sum_{i=1}^r \lambda_i^2\ ,$$

ce qui fait beaucoup penser à du Cauchy-Schwarz. Et effectivement, si dans $E = \mathbb{R}^r$ muni de son produit scalaire usuel, on pose $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne $(X|Y)^2 \leq \|X\|^2\ \|Y\|^2$, ce qui est justement l'inégalité à démontrer.

Remarque 1. Cette inégalité devient une égalité, bien sûr si $r = 0$ (A est alors la matrice nulle), ou alors si, dans $\mathbb{R}^r$ avec $r = \mathrm{rg}(A)$, les vecteurs X et Y ci-dessus sont colinéaires: cela se produit **si et seulement si** $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r$. Autrement dit, l'égalité

$\big(\mathrm{tr}(A)\big)^2 = \mathrm{tr}(A^2)\cdot \mathrm{rg}(A)$ a lieu **si et seulement si** la matrice symétrique rélle A admet une seule valeur propre non nulle.

Remarque 2. Tout ce qui précède reste vrai si on suppose seulement $A \in \mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$ diagonalisable, ce qui est une hypothèse plus faible que "symétrique" (les matrices symétriques réelles étant les matrices **orthogonalement** diagonalisables, i.e. diagonalisables à l'aide d'une matrice de passage orthogonale).

---

29. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$ une matrice antisymétrique.

a. Montrer que, pour tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathrm{I\!R})$, on a $X^\top AX = 0$.

b. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont strictement positives. Montrer que la matrice $M = A + B$ est inversible.

- -

a. L'expression $X^\top AX$ est un scalaire, elle est donc égale à sa transposée. Sachant que $A^\top = -A$, on obtient

$$X^\top AX = (X^\top AX)^\top = X^\top A^\top X = -X^\top AX \ ,$$

donc $X^\top AX = 0$.

b. La matrice symétrique B est définie positive d'après le cours (caractérisation spectrale), donc si X est un vecteur **non nul**, on a $X^\top(A+B)X = X^\top AX + X^\top BX = X^\top BX > 0$, ce qui entraîne $(A+B)X \neq 0$. Ainsi on vient de montrer que $\mathrm{Ker}(A+B) = \{0\}$, la matrice $A+B$ est donc inversible.

---

30. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$. Montrer que A est diagonale si et seulement si A est symétrique et a pour coefficients diagonaux ses valeurs propres. *On pourra utiliser la norme* $\|\cdot\|$ *sur* $\mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$ *définie par* $\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}(A^\top A)}$.

- -

• On rappelle que l'application $\mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})\times\mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$, $(A,B) \mapsto (A|B) = \mathrm{tr}(A^\top B) = \sum_{i,j} a_{i,j}b_{i,j}$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$, et le $\|\cdot\|$ de l'énoncé est donc la norme associée.

• Dans un sens, si A est diagonale, alors elle est symétrique et ses valeurs propres sont bien les coefficients diagonaux, c'est évident.

• Inversement, soit $A = (a_{i,j})$ une matrice symétrique, alors elle est diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage orthogonale : $A = PDP^{-1} = PDP^\top$, avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ et $P \in \mathrm{O}_n(\mathrm{I\!R})$. Mézalor

$$\sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \|A\|^2 = \mathrm{tr}(A^\top A) = \mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(PDP^\top PDP^\top) = \mathrm{Tr}(PD^2P^\top) = \mathrm{Tr}(D^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \ .$$

(*on a utilisé le fait que deux matrices semblables ont la même trace*)

Mais on fait l'hypothèse que les coefficients diagonaux de A sont ses valeurs propres, on a donc $\sum_{i=1}^n a_{i,i}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$. On en déduit que $\sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n a_{i,i}^2$, soit $\sum_{i\neq j} a_{i,j}^2 = 0$ et, comme une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul, on déduit enfin que $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$, donc A est une matrice diagonale.

31.a. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont positifs ou nuls. Montrer que

$$\forall V \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{tr}(DV) \leq \mathrm{tr}(D)\ .$$

b. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont positives ou nulles. Montrer que

$$\forall U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{tr}(AU) \leq \mathrm{tr}(A)\ .$$

- -

a. Notons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, les λ_i étant positifs. Posons $V = (v_{i,j})_{i,j}$ et $DV = (w_{i,j})_{i,j}$. On a alors $w_{i,j} = \lambda_i\, v_{i,j}$ (multiplier V à gauche par la matrice diagonale D revient à multiplier, pour tout i, la i-ième ligne de V par le coefficient λ_i). La matrice V étant orthogonale, ses coeeficients sont majorés par 1 en valeur absolue (par exemple parce que chaque colonne de V est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$). Donc, les coefficients λ_i étant positifs,

$$\mathrm{tr}(DV) = \sum_{i=1}^{n} w_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_{i,i} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, |v_{i,i}| \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}(D)\ .$$

b. D'après le théorème spectral, A est diagonalisable et $A = PDP^{-1} = PDP^\top$, avec $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale à coefficients diagonaux positifs. Alors, en utilisant **a.**,

$$\mathrm{tr}(AU) = \mathrm{tr}(PDP^\top U) = \mathrm{tr}(DP^\top UP) = \mathrm{tr}(DV) \leq \mathrm{tr}(D) = \mathrm{tr}(A)$$

en posant $V = P^\top UP \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ car c'est un produit de matrices orthogonales, la dernière égalité est vraie car les matrices A et D sont semblables.

---

32. Soit E un espace euclidien. Un endomorphisme autoadjoint u de E est dit **positif** si on a $\forall x \in E \quad \big(u(x)|x\big) \geq 0$.

a. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint, démontrer que u est positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.

b. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint positif. Montrer qu'il existe un endomorphisme autoadjoint positif v tel que $v^2 = u$.

c*. Montrer l'unicité de v dans la question précédente.

- -

a. *Je rappelle que c'est désormais une question de cours.*

• Supposons u positif ; soit alors λ une valeur propre de u, soit $x \in E$ un vecteur propre associé, on a $x \neq 0_E$ et $u(x) = \lambda x$, donc $\big(u(x)|x\big) = \lambda\, \|x\|^2 \geq 0$, d'où $\lambda \geq 0$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.

• Supposons $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$, notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de u (non nécessairement distinctes), les λ_i sont des réels positifs et, d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormale $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de u est $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, alors $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$ et, la base $\mathcal{E}$ étant orthonormale,

$$\big(u(x)|x\big)=\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i^2\geq 0\ ,$$

donc l'endomorphisme symétrique u est positif.

b. Soit u autoadjoint positif. D'après **a.**, il existe une base orthonormale $\mathcal{E}=(e_1,\cdots,e_n)$ de E dans laquelle u est représenté par une matrice diagonale $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, où les λ_i sont des réels positifs. Soit v l'endomorphisme de E représenté dans la même b.o.n. par la matrice $\Delta=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})$, alors v est autoadjoint (*car représenté dans une b.o.n. par une matrice symétrique*) et, de $\Delta^2=D$, on déduit $v^2=u$, d'où l'existence de v.

c. Pour l'unicité, notons λ_1, $\cdots$, λ_m les valeurs propres **distinctes** (positives) de u, et E_1, $\cdots$, E_m les sous-espaces propres associés. Si $v^2=u$, alors u et v commutent, donc les sous-espaces propres E_i de u sont stables par v. Pour tout $i\in[\![1,m]\!]$, notons v_i l'endomorphisme de E_i induit par v. Chaque v_i est diagonalisable (c'est un théorème du cours: "si un endomorphisme est diagonalisable, alors l'endomorphisme qu'il induit sur un sous-espace stable est aussi diagonalisable", mais on peut aussi invoquer le fait que, v étant symétrique, l'endomorphisme induit v_i est aussi symétrique donc diagonalisable par le théorème spectral). Enfin, la seule valeur propre possible de v_i est $\sqrt{\lambda_i}$: en effet, si $\alpha\in\mathrm{Sp}(v_i)$, alors $\alpha\geq 0$ d'après **a.** car v_i est évidemment symétrique positif, et si x est un vecteur propre associé, on a $v(x)=v_i(x)=\alpha x$ et $u(x)=v^2(x)=\alpha^2 x=\lambda_i x$ car $x\in E_i$. Comme x est non nul, on a $\alpha^2=\lambda_i$ et finalement $\alpha=\sqrt{\lambda_i}$ car α est positif. On a ainsi prouvé que $v_i=\sqrt{\lambda_i}\ \mathrm{id}_{E_i}$ (*un endomorphisme diagonalisable avec une seule valeur propre est une homothétie*). Comme $E=\displaystyle\bigoplus_{i=1}^m E_i$, un endomorphisme de E est entièrement déterminé par la donnée de ses restrictions aux E_i (c'est aussi un théorème du cours), donc v est déterminé de manière unique par le fait que l'endomorphisme induit sur chaque E_i est l'homothétie de rapport $\sqrt{\lambda_i}$.

---

33. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $S\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives. Montrer l'équivalence

$$AS=SA\qquad\Longleftrightarrow\qquad\exists k\in\mathbb{N}^*\ \ AS^k=S^kA\ .$$

- -

• Si $AS=SA$, alors par une récurrence immédiate, on a $AS^k=S^kA$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

• *Lemme.* Si E est un espace vectoriel de dimension finie, si $f\in\mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, alors un autre endomorphisme u de E commute avec f si et seulement s'il laisse stables les sous-espaces propres de f. *Le sens direct est du cours, la réciproque est un exercice facile laissé au lecteur.*

• Notons a et s les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés aux matrices A et S respectivement. On sait que s est diagonalisable, notons λ_1, $\cdots$, λ_m ses valeurs propres **distinctes**. Alors s^k est aussi diagonalisable, ses valeurs propres étant les λ_i^k $(1\leq i\leq m)$, qui sont aussi distinctes puisque l'application $x\mapsto x^k$ est injective sur $\mathbb{R}_+$, et les sous-espaces propres sont les mêmes: $E_{\lambda_i^k}(s^k)=E_{\lambda_i}(s)$. Donc, si a commute avec s^k pour un k entier naturel donné, il laisse stables les $E_{\lambda_i^k}(s^k)$, c'est-à-dire les $E_{\lambda_i}(s)$, et donc il commute aussi avec s. Matriciellement, $AS^k=S^kA\Longrightarrow AS=SA$.

34. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicité). Montrer que $\displaystyle\sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.

- -

Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Par le théorème spectral, A est semblable à D avec une matrice de passage orthogonale, i.e. $A = PDP^{-1} = PDP^\top$ avec $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. En notant $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la norme associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ défini par

$$(A|B) = \mathrm{tr}(A^\top B) = \sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j} \ ,$$

on a

$$\sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \|A\|^2 = \mathrm{tr}(A^\top A) = \mathrm{tr}(PD^\top P^\top PDP^\top) = \mathrm{tr}(PD^2P^{-1}) = \mathrm{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \ .$$

On a utilisé les relations $P^\top P = I_n$ ou $P^\top = P^{-1}$, $D^\top = D$, et le fait que deux matrices semblables ont la même trace.

35. Soit E un espace euclidien, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint défini positif. Montrer l'inégalité

$$\forall x \in E \qquad \|x\|^4 \leq \big(u(x)|x\big)\,\big(u^{-1}(x)|x\big) \ .$$

Déterminer les cas d'égalité.

- -

Pour $(x,y) \in E^2$, posons $< x, y >= \big(u(x)|y\big)$. Alors $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur E. En effet, la bilinéarité est immédiate. La symétrie résulte du fait que l'endomorphisme u est autoadjoint. Par ailleurs, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de u, notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres respectivement associées (elles sont toutes strictement positives). Si $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i e_i$ est un vecteur de E, on a

$$< x, x >= \big(u(x)|x\big) = \Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i | \sum_{j=1}^n x_j e_j\Big) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq 0$$

et cette somme de termes positifs est nulle si et seulement si chaque terme $\lambda_i x_i^2$ est nul, ce qui entraîne que $x = 0_E$, on a donc prouvé le caractère défini positif de $< \cdot, \cdot >$.

Il est par ailleurs immédiat que $u \in \mathrm{GL}(E)$, d'où l'existence de u^{-1}.

Il suffit alors d'écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce nouveau produit scalaire:

$$\forall x \in E \qquad \big\langle u^{-1}(x), x\big\rangle^2 \ \leq\ \big\langle u^{-1}(x), u^{-1}(x)\big\rangle\,\big\langle x, x\big\rangle \ ,$$

soit

$$\forall x \in E \qquad \|x\|^4 = \big(x|x\big)^2 \leq \big(x|u^{-1}(x)\big)\,\big(u(x)|x\big) \ ,$$

ce qui est l'inégalité demandée, avec égalité si et seulement si les vecteurs $u^{-1}(x)$ et x sont colinéaires, ce qui équivaut encore à la colinéarité des vecteurs x et $u(x)$, et donc au fait que x est un vecteur propre de u (ou est le vecteur nul).

---

36. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique réelle.

a. Montrer que A^2 est symétrique réelle et que $\mathrm{Sp}(A^2) \subset \mathbb{R}_-$.

b. On suppose A inversible. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, à valeurs propres imaginaires pures.

c. Montrer que $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$.

d.* En utilisant **c.**, montrer que le résultat du **b.** est vrai même si A n'est pas inversible.

- -

a. On a $(A^2)^\top = (A^\top)^2 = (-A)^2 = A^2$, donc A^2 est symétrique réelle. Les valeurs propres de A^2 sont donc toutes réelles. En notant $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$, si λ est une valeur propre de A^2 et $Y \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé, on a

$$\begin{aligned} \lambda \|Y\|^2 &= <\lambda Y, Y> = <A^2 Y, Y> = (A^2 Y)^\top Y = Y^\top A^\top A^\top Y \\ &= -Y^\top A^\top A Y = -(AY)^\top AY = -<AY, AY> = -\|AY\|^2 \leq 0 , \end{aligned}$$

donc $\lambda \leq 0$.

b. Si A est inversible, alors A^2 l'est aussi, et ses valeurs propres sont alors des réels strictement négatifs, notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ les valeurs propres (distinctes) de A^2. Comme A^2 est diagonalisable, elle admet pour polynôme annulateur $P = \prod_{\alpha \in \mathrm{Sp}(A^2)} (X - \alpha) = \prod_{k=1}^{m} (X - \lambda_k)$. On a ainsi, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la relation $P(A^2) = 0_n$, soit $Q(A) = 0_n$, en introduisant le polynôme Q défini par $Q(X) = P(X^2) = \prod_{k=1}^{m} (X^2 - \lambda_k) = \prod_{k=1}^{m} \left((X - i\sqrt{-\lambda_k})(X + i\sqrt{-\lambda_k}) \right)$. Ce polynôme Q est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Enfin, on a $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathcal{Z}(Q)$, les valeurs propres de A sont donc imaginaires pures.

c. L'inclusion $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^2)$ est immédiate.

Si $Y \in \mathbb{R}^n$ appartient à $\mathrm{Ker}(A^2)$, on a $A^2 Y = 0$, donc $<A^2 Y, Y> = 0$, soit $\|AY\|^2 = 0$ (*cf.* calcul fait en **a.**), donc $Y \in \mathrm{Ker}(A)$. Finalement, $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$.

Notons toutefois une petite ambiguïté: s'agit-il des noyaux de A et A^2 considérées comme matrices réelles (ce sont alors des s.e.v. de $\mathbb{R}^n$, et c'est ce qui a été prouvé ci-dessus) ou comme matrices complexes (ce sont alors des s.e.v. de $\mathbb{C}^n$, et c'est ce dont on aura besoin pour la question suivante) ? La réponse à cette question sera la même puisqu'on a toujours l'inclusion triviale $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^2)$ et que le rang d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est le même, qu'elle soit considérée comme matrice réelle ou comme matrice complexe.

d. Si A n'est pas inversible, alors elle admet 0 pour valeur propre et il en est de même pour A^2, et en notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes **non nulles** de A^2 (qui sont donc strictement négatives), le polynôme $P = X \prod_{k=1}^{m} (X - \lambda_k)$ annule A^2, donc le polynôme $Q = P(X^2) = X^2\, R(X)$ annule A, avec $R(X) = \prod_{k=1}^{m} (X^2 - \lambda_k)$. On a donc $Q(A) = A^2\, R(A) = 0_n$, soit $\mathrm{Im}\big(R(A)\big) \subset \mathrm{Ker}(A^2)$ et, de la question **c.**, on déduit que $\mathrm{Im}\big(R(A)\big) \subset \mathrm{Ker}(A)$, soit $A\, R(A) = 0_n$ et le polynôme XR annule A. Or, le polynôme $XR = X \prod_{k=1}^{m} \big((X - i\sqrt{-\lambda_k})\,(X + i\sqrt{-\lambda_k})\big)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, on déduit donc comme en **b.** que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, avec $\mathrm{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$.

---

37. Soit E euclidien, soit $u \in \mathrm{O}(E)$ une isométrie vectorielle.

a. Montrer que l'endomorphisme $v = u + u^{-1}$ est autoadjoint.

b. En déduire que E contient au moins une droite ou un plan stable par u.

c. Montrer que E est somme directe orthogonale de droites et de plans stables par u.

d. Montrer qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant de la forme (1) ou (-1) ou $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec θ réel.

- -

a. Soient $x \in E$ et $y \in E$. En utilisant le fait que u conserve le produit scalaire, on obtient

$$\big(v(x)|y\big) = \big(u(x)|y\big) + \big(u^{-1}(x)|y\big) = \big(x|u^{-1}(y)\big) + \big(x|u(y)\big) = \big(x|v(y)\big)\ ,$$

donc v est autoadjoint.

b. D'après le théorème spectral, v est diagonalisable, il admet donc au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $x \in E$ est un vecteur propre associé, on a $x \neq 0_E$ et $v(x) = \lambda x$, soit $u(x) + u^{-1}(x) = \lambda x$, ce qui entraîne $u^2(x) = \lambda\, u(x) - x$. Le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}\big(x, u(x)\big)$ est de dimension 1 ou 2, c'est donc une droite ou un plan, et il est stable par u puisque $u(x)$ et $u\big(u(x)\big)$ sont dans F.

c. On procède par récurrence forte sur $n = \dim(E)$.

- Pour $n = 1$ et $n = 2$, c'est immédiat.

- Soit $n \geq 3$, supposons la propriété vraie dans tout espace euclidien de dimension strictement inférieure à n. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$ avec $\dim(E) = n$, soit F_1 un sous-espace de dimension 1 ou 2 de E stable par u, on sait alors que $F_1^\perp$ est aussi stable par u. Notons u' l'endomorphisme de $F_1^\perp$ induit par u, c'est une isométrie de l'espace euclidien $F_1^\perp$ avec $\dim(F_1^\perp) < n$, on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence: il existe des sous-espaces $F_2, \cdots, F_k$ de $F_1^\perp$, de dimension 1 ou 2, stables par u' (donc par u), tels que $F_1^\perp = F_2 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} F_k$. On a alors $E = F_1 \overset{\perp}{\oplus} F_2 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} F_k$, les F_i étant des droites ou des plans stables par u.

d. On va construire une telle base par concaténation de bases orthonormales dans les F_i introduits ci-dessus ($1 \leq i \leq k$). Dans les F_i qui sont des droites, l'endomorphisme induit par u est id_{F_i} ou $-\mathrm{id}_{F_i}$ qui, dans toute base orthonormale (alors constituée d'un seul vecteur unitaire) est (1) ou (-1). Dans les F_i qui sont des plans, deux cas se présentent:

- soit l'endomorphisme induit u_i est une isométrie directe, i.e. une rotation, il est alors représenté dans toute base orthonormale de F_i par une matrice de la forme R_θ ;

- soit u_i est une réflexion, que l'on peut alors représenter dans une base orthonormale adaptée par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, elle-même constituée de deux blocs diagonaux (1) et (-1), ce qui autorise à conclure.

38*. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ qui commutent ($AB = BA$).
Montrer que $AB \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

- -

D'abors, la matrice AB est symétrique puisque $(AB)^\top = B^\top A^\top = BA = AB$.

Notons a et b les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés aux matrices A et B. Nous allons commencer par démontrer qu'il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres communs à a et à b.

L'endomorphisme a est autoadjoint pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, donc il est diagonalisable et, plus précisément, si l'on note $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ les valeurs propres (distinctes) de A, i.e. de a, on a alors $\mathbb{R}^n = \overset{\perp}{\bigoplus_{1 \le i \le k}} E_{\lambda_i}(a)$. Comme a et b commutent, les sous-espaces propres de a sont stables par b. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, notons b_i l'endomorphisme de $E_{\lambda_i}(a)$ induit par b. Comme b est autoadjoint (ou symétrique), il est immédiat que b_i est autoadjoint dans l'espace euclidien $E_{\lambda_i}(a)$. Par le théorème spectral de nouveau, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_i$ de $E_{\lambda_i}(a)$ constituée de vecteurs propres de b_i (donc de b), mézôssi de vecteurs propres de a puisque ses vecteurs sont dans $E_{\lambda_i}(a)$. La famille de vecteurs $\mathcal{B}$ obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_k$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ dont les vecteurs sont des vecteurs propres communs aux endomorphismes a et b.

Dans cette base, les endomorphismes a et b sont tous deux représentés par des matrices diagonales $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = \mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ et $\Delta = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b) = \mathrm{diag}(\beta_1, \cdots, \beta_n)$. Comme les endomorphismes autoadjoints a et b sont définis positifs, les α_i et les β_i sont strictement positifs. Enfin, l'endomorphisme $a \circ b$, qui est représenté canoniquement par la matrice AB, est représenté dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice diagonale $D\Delta = \mathrm{diag}(\alpha_1\beta_1, \cdots, \alpha_n\beta_n)$. Les valeurs propres de la matrice symétrique AB sont donc les $\alpha_i\beta_i$, qui sont strictement positifs, donc $AB \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

---

39. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence

$$X^\top A X = 0 \iff AX = 0\ .$$

- -

L'implication $AX = 0 \Longrightarrow X^\top AX = 0$ est triviale.

Si $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, il existe une matrice M symétrique positive aussi telle que $M^\top M = M^2 = A$. *En effet, il résulte du théorème spectral que l'on peut écrire $A = PDP^{-1} = PDP^\top$ avec $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, où les λ_i sont des réels positifs puisque ce sont les valeurs propres de A. En posant $\Delta = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}\right)$, la matrice $M = P\Delta P^{-1} = P\Delta P^\top$ convient.*

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X^\top AX = 0$, i.e. $X^\top M^\top MX = 0$, on a donc $(MX)^\top MX = 0$, soit $\|MX\|^2 = 0$, donc $MX = 0$ et enfin $AX = M^\top MX = 0$.

---

40. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \min\{i, j\}$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on considère la matrice $J_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1, et on pose $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En utilisant les matrices A_k, montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

- -

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On observe que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$X^\top A_k X = \sum_{i=n-k+1}^{n} \sum_{j=n-k+1}^{n} x_i x_j = \left(\sum_{i=n-k+1}^{n} x_i \right)^2 \geq 0 \ ,$$

autrement dit chaque matrice (symétrique) A_k est positive. Par ailleurs,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} A_k \ .$$

Donc $X^\top AX = \sum_{k=1}^{n} X^\top A_k X \geq 0$ pour tout X, donc $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Enfin, une somme de termes positifs étant nulle si et seulement si chaque terme est nul, on a

$$X^\top AX = 0 \iff \forall k \in [\![1, n]\!] \quad X^\top A_k X = 0 \iff \forall k \in [\![1, n]\!] \quad \sum_{i=n-k+1}^{n} x_i = 0 \iff X = 0 \ .$$

La matrice symétrique A est donc définie positive.

41.a. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $x_1, \cdots, x_n$ des points de I. Prouver l'inégalité (cas particulier de l'**inégalité de Jensen**):

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \ .$$

b. Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Prouver l'inégalité $\sqrt[n]{\det(B)} \leq \dfrac{1}{n} \operatorname{tr}(B)$.

c. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A) \leq \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$. *On pourra poser* $b_{i,j} = \dfrac{a_{i,j}}{\sqrt{a_{i,i}\, a_{j,j}}}$.

- -

a. Par récurrence sur n. Pour $n = 2$, cela résulte immédiatement de la définition de la convexité: avec $\lambda = \dfrac{1}{2} \in [0, 1]$, on a, pour $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$, l'inégalité

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) = f\big((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2\big) \leq (1 - \lambda)\, f(x_1) + \lambda\, f(x_2) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \ .$$

Supoosons la propriété vraie pour n donné, avec $n \geq 2$. Soient $x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}$ des points de I, le réel $y = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ (moyenne arithmétique des réels $x_1, \cdots, x_n$) appartient à I, et on a, par convexité de f avec $\lambda = \dfrac{1}{n+1} \in [0,1]$:

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1}}{n+1}\right) = f\left(\frac{n}{n+1}\, y + \frac{1}{n+1}\, x_{n+1}\right) \leq \frac{n}{n+1}\, f(y) + \frac{1}{n+1} f(x_{n+1})$$

. L'hypothèse de récurrence permet ensuite d'écrire

$$f(y) = f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} .$$

En réinjectant, on obtient bien

$$f\left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i\right) \leq \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) .$$

b. Le théorème spectral permet d'écrire $B = PDP^\top$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ et $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, les λ_i étant strictement positifs.

On a bien sûr $\det(B) = \det(D) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(D) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Il s'agit donc de montrer l'**inégalité arithmético-géométrique**

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \text{ , ou encore } \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(\lambda_i) \leq \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) .$$

On reconnaît l'inégalité de Jensen montrée en **a.** appliquée à la fonction ln (qui est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où les inégalités dans l'autre sens) et aux points λ_i.

c. Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on a $X^\top AX > 0$ pour tout vecteur-colonne X non nul. En particulier, en notant $(E_1, \cdots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $a_{i,i} = E_i^\top AE_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, ce qui garantit la bonne définition des $b_{i,j}$. La matrice B est alors clairement symétrique, et elle est définie positive car, si $X = (\, x_1 \quad \cdots \quad x_n \,)^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est non nulle, alors

$$X^\top BX = \sum_{i,j} b_{i,j} x_i x_j = \sum_{i,j} a_{i,j}\, \frac{x_i}{\sqrt{a_{i,i}}}\, \frac{x_j}{\sqrt{a_{j,j}}} = \sum_{i,j} a_{i,j} y_i y_j = Y^\top AY ,$$

en posant $Y = (\, y_1 \quad \cdots \quad y_n \,)^\top$ avec $y_i = \dfrac{x_i}{\sqrt{a_{i,i}}}$ pour tout i. De $X \neq 0$, on déduit $Y \neq 0$ puis $X^\top BX = Y^\top AY > 0$ puisque $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On peut donc appliquer la question précédente à la matrice B, ce qui donne $\sqrt[n]{\det(B)} \leq \dfrac{1}{n}\mathrm{tr}(B)$. Mais on a $b_{i,i} = 1$ pour tout i, donc $\mathrm{tr}(B) = n$. Enfin, B est obtenue à partir de A par les opérations élémentaires (dilatations) $L_i \leftarrow \dfrac{1}{\sqrt{a_{i,i}}} L_i$ $(1 \leq i \leq n)$ et $C_j \leftarrow \dfrac{1}{\sqrt{a_{j,j}}} C_j$ $(1 \leq j \leq n)$, on en déduit que $\det(B) = \dfrac{\det(A)}{a_{1,1} \cdots a_{n,n}}$, puis que $\det(B) \leq 1$, soit $\det(A) \leq \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Étude du plan et de l'espace euclidiens

42. Reconnaître les endomorphismes de l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$ représentés par les matrices suivantes:

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix} .$$

- -

On s'assure d'abord que chacune de ces trois matrices est orthogonale (sur chaque colonne la somme des carrés des coefficients vaut 1, sur deux colonnes distinctes la somme des produits deux à deux des coefficients est nulle). Toutes les trois représentent donc des isométries vectorielles (ou “automorphismes orthogonaux”). Les détails de calcul seront omis, afin de ne pas heurter les plus sensibles de nos lecteurs.

• On vérifie que $\det(A) = +1$, ainsi A est une matrice de rotation (autre que l'identité). L'axe de cette rotation r est $\operatorname{Ker}(A - I_3) = \operatorname{Vect}(u)$, avec $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Son angle θ est déterminé, au signe près, par la relation $1 + 2\cos\theta = \operatorname{tr}(A) = 0$, donc $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$, puis $\theta = \pm\dfrac{2\pi}{3}$ modulo 2π. Le vecteur $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est orthogonal à l'axe de la rotation et on calcule le produit mixte

$$\big[e_1, r(e_1), u\big] = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 1 \\ 0 & -\sqrt{6} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{2} > 0 \,,$$

donc l'angle de la rotation est $+\dfrac{2\pi}{3}$ si l'axe de la rotation est orienté par le vecteur u.

• On vérifie que $\det(B) = -1$, ainsi B représente une isométrie indirecte. Par ailleurs, on remarque que la matrice B est symétrique ($B^\top = B$) ; comme elle est aussi orthogonale ($B^\top B = I_3$), on a donc $B^2 = I_3$, donc B représente une symétrie, et donc une réflexion s puisque c'est une isométrie indirecte autre que $-\operatorname{id}_E$. Il ne reste donc plus qu'à déterminer le plan de la réflexion, i.e. le s.e.v. des vecteurs invariants, soit encore $E_1(B) = \operatorname{Ker}(B - I_3)$, il est facile de voir que c'est le plan P d'équation cartésienne $3x - 2y + z = 0$. La matrice B représente donc canoniquement la réflexion par rapport à ce plan.

• On vérifie que $\det(C) = -1$, ainsi C représente une isométrie indirecte. La matrice C n'est pas symétrique, donc ne vérifie pas $C^2 = I_3$, ce n'est donc pas une matrice de symétrie (réflexion), il s'agit alors d'une “antirotation” (ou encore composée d'une réflexion s et d'une rotation r dont on peut choisir l'axe orthogonal au plan de la réflexion). On vérifie que l'ensemble des vecteurs anti-invariants (i.e. transformés en leurs opposés), soit $\operatorname{Ker}(C + I_3)$, est la droite $D = \operatorname{Vect}(u)$, avec $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cette droite D est alors l'axe de la rotation r. Son angle θ est déterminé, au signe près, par la relation $2\cos\theta - 1 = \mathrm{tr}(C)$, donc $\cos\theta = -\dfrac{7}{9}$ et $\theta = \pm\,\mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{7}{9}\right)$. Le vecteur $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est orthogonal à l'axe D, donc appartient au plan P de la réflexion, et

$$[e_1, Ce_1, u] = \frac{1}{9}\begin{vmatrix}1 & -7 & 0\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & -4 & 1\end{vmatrix} = \frac{8}{9} > 0\ ,$$

donc $\theta = +\,\mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{7}{9}\right)$ si l'axe D est orienté par le choix du vecteur directeur u.

---

43. Écrire la matrice, dans $\mathbb{R}^3$, de la rotation d'axe D dirigé et orienté par le vecteur $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

- -

Notons $\mathcal{B}_0 = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(r)$.

Méthode 1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale directe de E telle que $e_3 = \dfrac{u}{\|u\|}$, on sait que la matrice de r relativement à la base $\mathcal{B}$ est

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & 0\\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

On calcule alors A par la relation $A = PMP^{-1}$, où $P = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}$ est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$. Notons que, ces deux bases étant orthonormales, la matrice P est alors orthogonale, donc $P^{-1} = P^\top$, ce qui simplifie le calcul. Effectuons les calculs, sans trop de détails : on a donc $e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, on choisit un vecteur e_1 unitaire et orthogonal à e_3, par exemple $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, et on prend enfin $e_2 = e_3 \wedge e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

On a alors

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & -2 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\ ,\quad \text{puis}\quad A = P\,M\,P^\top = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

Le détail du calcul n'est pas très folichon, je le laisse donc à l'improbable lecteur.

Méthode 2. Posons $\omega = \dfrac{u}{\|u\|}$. Si x est un vecteur de E, on le décompose en $x = y + z$, où y est son projeté orthogonal sur l'axe $D = \mathbb{R}\,u$ de la rotation, z son projeté orthogonal sur le plan $P = D^\perp$. Alors $r(x) = r(y) + r(z)$ car r est linéaire, mais $r(y) = y$ car les vecteurs de l'axe sont invariants, donc $r(y) = y = (\omega|x)\,x$. La composante z "tourne" de $\dfrac{\pi}{3}$ dans le plan

P orienté corrélativement à l'axe, ce qui veut dire que $r(z) = \left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right) z + \left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right) \omega \wedge z$ (*le vecteur* $\omega \wedge z$ *est, dans le plan* P *orienté, le vecteur "directement orthogonal" à* z). Par ailleurs, $\omega \wedge z = \omega \wedge (x - y) = \omega \wedge x$ car $\omega \wedge y = 0$. Finalement, on obtient la jolie formule suivante, plus généralement pour l'image d'un vecteur x par la rotation r d'angle θ et d'axe dirigé et orienté par ω unitaire :

$$r(x) = (1 - \cos\theta)\,(\omega|x)\,\omega + (\cos\theta)\,x + (\sin\theta)\,\omega \wedge x\ .$$

Partant d'un vecteur $x = x_1\,i + x_2\,j + x_3\,k$, on calcule les coordonnées de son image $r(x)$ par cette formule, et on déduit la matrice $A = M_{\mathcal{B}_0}(r)$. Les calculs sont bien évidemment laissés à l'improbable lecteur, et conduisent normalement au même résultat que la **Méthode 1**.

---

44. Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ est représenté par la matrice $M = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale. Éléments caractéristiques de f ?

- -

On remarque que la matrice M est symétrique: $M^\top = M$. On remarque aussi qu'elle est orthogonale (sur chaque colonne, la somme des carrés des coefficients vaut 1 ; sur deux colonnes distinctes, la somme des produits deux à deux des coefficients vaut 0), donc $MM^\top = I_3$. Du coup, $M^2 = I_3$: l'endomorphisme f vérifie donc $f^2 = \mathrm{id}$, c'est une symétrie. C'est une symétrie orthogonale car la matrice est orthogonale. Il suffit donc de rechercher le s.e.v. par rapport auquel on fait la symétrie, soit $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$, ensemble des vecteurs invariants.

On observe $M - I_3 = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -9 & 6 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, on voit qu'elle est de rang 1, et $F = \mathrm{Ker}(M - I_3)$ est donc un plan, plus précisément c'est le plan P d'équation cartésienne $3x - 2y + z = 0$. Donc f est la réflexion de plan P (symétrie orthogonale par rapport à P).

---

45. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} a^2 & ab + c & ac - b \\ ab - c & b^2 & bc + a \\ ac + b & bc - a & c^2 \end{pmatrix}$ avec a, b, c réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

a. Décomposer M en $M = S + A$ avec S symétrique et A antisymétrique. Interpréter géométriquement les matrices S et A.

b. Interpréter géométriquement l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

- -

a. On décompose M en ses parties symétrique et antisymétrique :

$$M = S + A\ , \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}\ ,$$

on peut s'apercevoir que $S = UU^\top$, avec $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$; ainsi, pour toute matrice-colonne X, on a $SX = (UU^\top)\,X = U\,(U^\top X) = (U|X)\,U$ puisque $U^\top X$ est un scalaire, précisément c'est le produit scalaire des vecteurs U et X. Comme $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, le vecteur U est unitaire, donc $SX = (U|X)U$ est le projeté orthogonal du vecteur X sur la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(U)$ d'après le cours.

On peut remarquer ensuite que A est la matrice représentant canoniquement l'endomorphisme $X \mapsto X \wedge U$ de $\mathbb{R}^3$. L'interprétation géométrique est un peu moins simple: on peut reconnaître toutefois la composée (commutative) de la projection orthogonale sur le plan $P = \big(\mathrm{Vect}(U)\big)^\perp$ et de la rotation d'axe dirigé et orienté par U et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

b. L'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement représenté par M a donc pour expression

$$f : X \mapsto (U|X)\,U - U \wedge X\ .$$

Le vecteur U est unitaire, si on complète (U) en une base orthonormale directe $\mathcal{B} = (U, V, W)$, alors en calculant les images des vecteurs de la base, on voit que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

On reconnaît alors une rotation d'axe D dirigé et orienté par U, et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

---

46. Soit E un espace euclidien orienté de dimension trois, soit a un vecteur non nul de E.

a. Montrer que l'application $f : x \mapsto a \wedge x$ est un endomorphisme de E. Préciser son noyau et son image.

b. Soit $b \in E$. Calculer $a \wedge (a \wedge b)$. Préciser à quelles conditions sur b l'équation $a \wedge x = b$ admet des solutions, et résoudre alors complètement cette équation.

- -

a. La linéarité de f résulte de la linéarité à droite du produit vectoriel. On sait que le produit vectoriel de deux vecteurs est nul lorsque les deux vecteurs sont colinéaires, on en déduit que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(a)$. Par le théorème du rang, on déduit alors que $\mathrm{Im}\, f$ est de dimension 2. Mais on sait aussi que le produit vectoriel de deux vecteurs est orthogonal à chacun des deux vecteurs, d'où $\mathrm{Im}\, f \subset \big(\mathrm{Vect}(a)\big)^\perp$. Comme les sous-espaces $\mathrm{Im}\, f$ et $\big(\mathrm{Vect}(a)\big)^\perp$ ont la même dimension, ils sont donc égaux.

b. On a $a \wedge (a \wedge b) = (a|b)\,a - \|a\|^2\, b$ par la formule du double produit vectoriel.

L'équation **(E)**: $a \wedge x = b$ s'écrit $f(x) = b$, elle admet des solutions (elle est "compatible") si et seulement si $b \in \mathrm{Im}\, f$, autrement dit **si et seulement si** les vecteurs a et b sont orthogonaux d'après l'étude faite en **a.**

Par ailleurs, **(E)** est une équation linéaire (puisque f est linéaire) ; si elle admet des solutions, on obtient donc ses solutions en ajoutant une solution particulière x_0 à la solution générale de l'équation homogène associée **(E0)**. Les solutions de **(E0)**: $f(x) = 0_E$ sont les vecteurs de $\mathrm{Ker}\, f$ toujours d'après **a.**, et le calcul de double produit vectoriel fait ci-dessus montre que le vecteur $x_0 = -\dfrac{a \wedge b}{\|a\|^2}$ est une solution particulière de **(E)** lorsque a et b sont orthogonaux.

Bilan. L'équation **(E)**: $a \wedge x = b$ admet des solutions si et seulement si les vecteurs a et b sont orthogonaux, et dans ce cas les solutions de **(E)** sont les vecteurs de la forme $x = -\dfrac{a \wedge b}{\|a\|^2} + \lambda a$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.