Calcul de dérivées partielles

1. On pose $f(x,y)=\dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$, et $f(0,0)=0$. Montrer que l'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

- -

L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $U=\mathbb{R}^2\setminus\big\{(0,0)\big\}$ par opérations sur des fonctions $\mathcal{C}^1$. Pour $(x,y)\in U$, on calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x^2y^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}\qquad\text{et}\qquad\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2x^5y}{(x^2+y^2)^2}\ .$$

Par ailleurs, les applications partielles à l'origine, i.e. les applications $x\mapsto f(x,0)$ et $y\mapsto f(0,y)$ sont nulles, donc sont dérivables en 0 avec une dérivée nulle, cela prouve l'existence de dérivées partielles premières de f à l'origine, avec $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

L'application f admet donc en tout point de $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles d'ordre un, il reste à montrer que les applications $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$. Elles sont toutes deux continues sur U comme produits et quotients de fonctions continues, il reste donc à examiner la continuité en $(0,0)$.

En utilisant les inégalités $0\leq x^2\leq x^2+y^2$, $0\leq y^2\leq x^2+y^2$ et $|2xy|\leq x^2+y^2$, on obtient facilement

$$0\leq\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\leq\frac{3(x^2+y^2)^3}{(x^2+y^2)^2}=3(x^2+y^2)\quad\text{et}\quad\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|=\frac{|2xy|\,(x^2)^2}{(x^2+y^2)^2}\leq x^2+y^2$$

et, comme il est clair que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)=0$, on déduit par encadrement que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\quad\text{et}\quad\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\ .$$

La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

---

2. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer l'équivalence entre les assertions:

(1) : $\forall t\in\mathbb{R}\quad\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\qquad f(x+t,y+t)=f(x,y)$;

(2) : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\qquad\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0.$

- -

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ fixé, l'application $g_{x,y}:t\mapsto f(x+t,y+t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $g'_{x,y}(t)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x+t,y+t)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x+t,y+t)$.

• Si on a **(1)**, alors pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $g_{x,y}$ est constante sur $\mathbb{R}$ donc $g'_{x,y}(0)=0$, ce qui donne **(2)**.

• Si on a **(2)**, alors pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, l'application dérivable $g_{x,y}$ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$, donc elle est constante et, pour tout t, $g_{x,y}(t)=g_{x,y}(0)$, ce qui donne **(1)**.

---

3. Expression du laplacien en coordonnées polaires.

Soit $f:(x,y)\mapsto f(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, soit $g:(r,\theta)\mapsto f(r\,\cos\theta,r\,\sin\theta)$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ à l'aide des dérivées partielles de g.

- -

On a $g = f \circ X$, avec $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par $X(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Comme f et X sont de classe $\mathcal{C}^2$, alors $g = f \circ X$ l'est aussi. Passons au calcul, un peu fastidieux... Par la règle de la chaîne généralisée,

$$\textbf{(1) :}\quad \frac{\partial g}{\partial r} = \cos(\theta)\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\,\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \textbf{(2) :}\quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\,\sin(\theta)\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\,\cos(\theta)\,\frac{\partial f}{\partial y}\ .$$

Notons que la relation **(1)** peut s'écrire aussi $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = r\,\dfrac{\partial f}{\partial r}$, cela sera utile pour la suite. On redérive **(1)** par rapport à r:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} &= \cos(\theta)\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \sin(\theta)\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&= \cos(\theta)\left[\cos(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right] + \sin(\theta)\left[\cos(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \sin(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]\\
&= \cos^2(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\cos(\theta)\,\sin(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \sin^2(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\ .
\end{aligned}$$

On redérive **(2)** par rapport à θ:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} &= -r\,\cos(\theta)\,\frac{\partial f}{\partial x} - r\,\sin(\theta)\,\frac{\partial f}{\partial y} - r\,\sin(\theta)\left[-r\,\sin(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r\,\cos(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right]\\
&\qquad + r\,\cos(\theta)\left[-r\,\sin(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + r\,\cos(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]\\
&= -r\,\cos(\theta)\,\frac{\partial f}{\partial x} - r\,\sin(\theta)\,\frac{\partial f}{\partial y} + r^2\,\sin^2(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r^2\,\cos(\theta)\,\sin(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + r^2\,\cos^2(\theta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\ .
\end{aligned}$$

On observe enfin que $r^2\,\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = r^2\,\Delta f - \left(x\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$, donc pour $r \neq 0$, i.e. $(x,y) \neq (0,0)$, on conclut que

$$\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial g}{\partial r}\ .$$

---

4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$.

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

b. Est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

- -

a. • La fonction f est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme produit et quotient de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ ne s'annulant pas (c'est une fonction rationnelle). Le seul problème est donc en $(0,0)$.

• Le passage en polaires permet d'étudier la continuité: en posant $\begin{cases} x = r\,\cos\theta \\ y = r\,\sin\theta \end{cases}$, on a

$$f(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta) = \frac{r^4\,\cos\theta\,\sin\theta\,(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r^2} = \frac{r^2}{4}\,\sin 4\theta\ . \qquad \textbf{(*)}$$

La fonction $\theta \mapsto \sin 4\theta$ étant bornée sur $\mathbb{R}$, il est clair que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, donc f est continue au point $(0,0)$. En effet, faire tendre (x,y) vers $(0,0)$ revient, en coordonnées polaires, à faire tendre r vers 0 indépendamment de θ. Une explication plus rigoureuse est aussi que, puisque $r = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|_2$, la relation **(*)** montre que

$$|f(x,y)| = |f(x,y) - f(0,0)| \leq \frac{1}{4}\,\|(x,y)\|_2^2\ ,$$

d'où découle la continuité de f en $(0,0)$ en disant par exemple que pour avoir $|f(x,y) - f(0,0)| \leq \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ donné, il suffit que $\|(x,y)\|_2 \leq \alpha$ en choisissant $\alpha = 2\sqrt{\varepsilon}$ pour ceux qui aiment la définition de la continuité et de la limite avec des ε et des α.

• Sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, les dérivées partielles premières se calculent en appliquant les règles de dérivation d'un produit ou d'un quotient : on obtient

$$\forall (x,y) \in U \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\,(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x\,(x^4 - y^4 - 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}\ .$$

L'existence de dérivées partielles en $(0,0)$ ne peut se déduire ici que de l'étude des applications partielles $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$, mais les deux étant nulles, on a donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

• Les applications dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont donc bien définies sur $\mathbb{R}^2$, elles sont continues sur l'ouvert U et leur continuité en $(0,0)$ peut s'étudier encore en passant en coordonnées polaires :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta) = \frac{r^5\,\varphi(\theta)}{r^4} = r\,\varphi(\theta)\ ,$$

où la fonction φ (que je n'explicite pas) est bornée sur $\mathbb{R}$ (elle est continue et 2π-périodique, c'est un polynôme trigonométrique). On a donc $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ par le même raisonnement que ci-dessus. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

b. La dérivée partielle seconde $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)$, si elle existe, est la dérivée en 0 de l'application partielle $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$. Or, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$ pour tout x, donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) = 1$. De même, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$, donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0) = -1$. Les dérivées partielles "croisées" prenant des valeurs différentes à l'origine, on déduit que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (théorème de Schwarz).

Équations aux dérivées partielles

5.a. En utilisant le changement de variables $\{u = x+y\ ,\ v = x-y\}$, résoudre, sur $\mathbb{R}^2$, l'équation aux dérivées partielles

$$(\mathbf{E}) \quad : \qquad \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + 3(x-y)\,f = 0\ .$$

b. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe une unique solution de **(E)** vérifiant $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x,0) = g(x)$ et l'expliciter.

- -

a. On pose $f(x,y) = F(u,v)$, soit $f = F \circ \varphi$, avec $\varphi : (x,y) \mapsto (u,v) = (x+y, x-y)$ qui est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même. On applique la règle de la chaîne, qui nous donne

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}$$

et, de manière analogue, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{\partial F}{\partial v}$. On a ainsi

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}) \quad &\iff \quad 2\,\frac{\partial F}{\partial v} + 3v\,F(u,v) = 0 \iff \frac{\partial}{\partial v}\left(e^{\frac{3v^2}{4}}\;F(u,v)\right) = 0 \\
&\iff \quad e^{\frac{3v^2}{4}}\;F(u,v) = h(u)\ ,
\end{aligned}$$

où h est une fonction d'une variable, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Continuons, cela donne donc $F(u,v) = e^{\frac{-3v^2}{4}}\;h(u)$, soit $f(x,y) = e^{-\frac{3}{4}(x-y)^2}\;h(x+y)$, où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction arbitraire de classe $\mathcal{C}^1$.

b. Il s'agit de montrer que le fait de connaître f sur l'axe Ox détermine complètement f, autrement dit détermine complètement la fonction arbitraire h. La condition imposée donne directement $h(x) = g(x)\,e^{\frac{3x^2}{4}}$, d'où le résultat. Explicitons toutefois jusqu'au bout :

$$f(x,y) = e^{-\frac{3}{4}(x-y)^2}\;e^{\frac{3}{4}(x+y)^2}\;g(x+y) = e^{3xy}\,g(x+y)\ .$$

---

6. En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telles que

$$y\,\frac{\partial f}{\partial x} - x\,\frac{\partial f}{\partial y} = f\ .$$

- -

On utilise les coordonnées polaires, i.e. on pose $x = r\,\cos\theta$ et $y = r\,\sin\theta$. Lorsque les coordonnées cartésiennes (x,y) décrivent le demi-plan ouvert $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on peut considérer que les coordonnées polaires (r,θ) décrivent la demi-bande ouverte $V = \mathbb{R}_+^* \times]0,\pi[$. On posera donc $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ pour $(r,\theta) \in V$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V. Un calcul classique par la règle de la chaîne donne

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -r\,(\sin\theta)\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\,(\cos\theta)\,\frac{\partial f}{\partial y} = -y\,\frac{\partial f}{\partial x} + x\,\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \text{et...}$$

... et cela suffit puisque nous retrouvons le premier membre de notre équation aux dérivées partielles qui s'écrit $\dfrac{\partial F}{\partial \theta} + F(r,\theta) = 0$, soit encore $e^{-\theta}\,\dfrac{\partial}{\partial \theta}\big(e^{\theta}\,F(r,\theta)\big) = 0$, et qui se résout en $F(r,\theta) = C(r)\,e^{-\theta}$, où $C : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonction arbitraire de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour revenir aux coordonnées cartésiennes, notons que, si $\theta \in]0,\pi[$, alors $\dfrac{\pi}{2}-\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{x}{y}\;,\quad \text{donc}\quad \frac{\pi}{2}-\theta=\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right)\;,$$

puis $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Donc $f(x,y)=C\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\,e^{\mathrm{Arctan}\frac{x}{y}-\frac{\pi}{2}}$, ce que l'on peut écrire aussi $f(x,y)=g(x^2+y^2)\,e^{\mathrm{Arctan}\frac{x}{y}}$, où $g:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ est une fonction arbitraire de classe $\mathcal{C}^1$.

---

7. Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$, l'équation aux dérivées partielles

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x}+y\,\frac{\partial f}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}\;.$$

- -

On utilise les coordonnées polaires, i.e. on pose $x=r\,\cos\theta$ et $y=r\,\sin\theta$. Lorsque les coordonnées cartésiennes (x,y) décrivent le demi-plan ouvert $U=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$, on peut considérer que les coordonnées polaires (r,θ) décrivent la demi-bande ouverte $V=\mathbb{R}_+^*\times\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. On posera donc $F(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ pour $(r,\theta)\in V$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V. Un calcul classique par la règle de la chaîne donne

$$\frac{\partial F}{\partial r}=(\cos\theta)\,\frac{\partial f}{\partial x}+(\sin\theta)\,\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{r}\left(x\,\frac{\partial f}{\partial x}+y\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\qquad\text{et...}$$

... et cela suffit puisque nous retrouvons le premier membre de notre équation aux dérivées partielles qui s'écrit $\dfrac{\partial F}{\partial r}=1$, et qui se résout en $F(r,\theta)=r+g(\theta)$, où $g:\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$ est une fonction arbitraire de classe $\mathcal{C}^1$. En revenant aux coordonnées cartésiennes, on obtient l'expression $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+g\Big(\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}\Big)$, ou $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+h\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$, où $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction arbitraire de classe $\mathcal{C}^1$.

---

8. Soit α un réel. Une fonction $f:(\mathbb{R}_+^*)^2\to\mathbb{R}$ est dite **homogène de degré** α si elle vérifie

$$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2\quad \forall t\in\mathbb{R}_+^*\qquad f(tx,ty)=t^\alpha\,f(x,y)\;.$$

a. Soit $f:(\mathbb{R}_+^*)^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est homogène de degré α si et seulement si elle est solution de l'équation aux dérivées partielles **(E):** $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\,\dfrac{\partial f}{\partial y}=\alpha\,f$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

On pourra considérer $g:t\mapsto f(tx,ty)$, *avec* $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ *fixé.*

b. Soit $f:(\mathbb{R}_+^*)^2\to\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, homogène de degré α. Montrer que l'on a

$$x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\alpha\,(\alpha-1)\,f\;.$$

- -

a. Fixons $m = (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, et considérons la fonction d'une variable $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(tx,ty)$. On peut écrire $g = f \circ \varphi$, avec $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\varphi(t) = (tx,ty)$. On a $\varphi'(t) = (x,y)$ et $g'(t) = \mathrm{d}f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) = \Big(\nabla f\big(\varphi(t)\big)\Big|\varphi'(t)\Big) = x\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)$.

• Si f est homogène de degré α, alors on a aussi $g(t) = t^\alpha\, g(1)$, donc $g'(t) = \alpha\, t^{\alpha-1}\, g(1)$, donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad x\,\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\,\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = \alpha\, t^{\alpha-1}\, f(x,y)\ .$$

En évaluant cette égalité pour $t = 1$, on obtient la relation **(E)** demandée.

• Inversement, si f vérifie l'équation $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha\, f(x,y)$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, en appliquant cette relation au point (tx,ty), on a

$$tx\,\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + ty\,\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = \alpha\, f(tx,ty)\ ,$$

soit $t\,g'(t) = \alpha\, g(t)$. La fonction g est donc solution d'une équation différentielle ordinaire, qui se résout en $g(t) = C\,t^\alpha$ avec, bien sûr, $C = g(1) = f(x,y)$, et on obtient bien la relation $f(tx,ty) = t^\alpha\, f(x,y)$.

b. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et homogène de degré α sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, on écrit l'équation **(E1)** obtenue en dérivant **(E)** par rapport à la variable x, puis l'équation **(E2)** obtenue en dérivant **(E)** par rapport à la variable y, puis on forme la combinaison linéaire $x \times (\mathbf{E1}) + y \times (\mathbf{E2})$, on obtient alors

$$x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (\alpha-1)\left(x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\ .$$

En appliquant de nouveau **(E)** au second membre, on conclut.

---

9. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telles que, en posant $\varphi(x,y) = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, on ait

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}\ .$$

- -

Posons $t = \dfrac{y}{x}$ pour simplifier. On calcule $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2}\, f'\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$, et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{x}\, f'\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$, puis

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2y}{x^3}\, f'\Big(\frac{y}{x}\Big) + \frac{y^2}{x^4}\, f''\Big(\frac{y}{x}\Big) \qquad ; \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{x^2}\, f''\Big(\frac{y}{x}\Big)\ ,$$

d'où l'expression du laplacien

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}\left[2\,\frac{y}{x}\, f'\Big(\frac{y}{x}\Big) + \Big(1 + \frac{y^2}{x^2}\Big)\, f''\Big(\frac{y}{x}\Big)\right]\ .$$

En multipliant par x^2, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{y}{x^3} \quad &\iff \quad (1+t^2)\,f''(t)+2t\,f'(t)=t\\
&\iff \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[(1+t^2)\,f'(t)\big]=t\\
&\iff \quad (1+t^2)\,f'(t)=\frac{t^2}{2}+C\\
&\iff \quad f'(t)=\frac{(t^2+1)-1}{2(1+t^2)}+\frac{C}{1+t^2}\\
&\iff \quad f'(t)=\frac{1}{2}+\frac{K}{1+t^2}\\
&\iff \quad f(t)=\frac{t}{2}+K\ \mathrm{Arctan}(t)+K'\ .
\end{aligned}$$

---

10. Résoudre, dans l'ouvert $U=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>|y|\big\}$, l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\ .$$

On pourra poser $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$.

- -

L'ouvert U est un "quadrant" (ou "quart de plan") compris entre les deux bissectrices. Le changement de variables linéaire proposé, qui peut s'écrire aussi $\Big\{x=\dfrac{u+v}{2}\ ;\ y=\dfrac{u-v}{2}\Big\}$ le transforme en le quadrant V défini par $u+v>|u-v|$, inéquation qui équivaut en fait à $\big\{u>0\ ,\ v>0\big\}$. Pour $(x,y)\in U$, posons

$$f(x,y)=F(u,v)=F(x+y,x-y)\ ,$$

ce qui revient à poser $F(u,v)=f\Big(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{u-v}{2}\Big)$ pour tout $(u,v)\in V$. On applique la règle de la chaîne:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\ .$$

De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial F}{\partial u}-\dfrac{\partial F}{\partial v}$. Puis on s'attaque aux dérivées partielles d'ordre deux:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = \frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\frac{\partial v}{\partial x}\\
&= \frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\Big)+\frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\Big)\\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+2\,\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\ .
\end{aligned}$$

Les fonctions recherchées étant implicitement de classe $\mathcal{C}^2$, on a en effet $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial v\,\partial u}$.
Un calcul analogue donne $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2\,\dfrac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}$. L'équation proposée se ramène alors à

$$4\,\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{\sqrt{uv}}\ , \quad \text{soit} \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right) = \frac{1}{4\sqrt{uv}}\ .$$

En intégrant par rapport à u, on obtient $\dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}} + h(v)$, où $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonction arbitraire de classe $\mathcal{C}^1$. En intégrant alors par rapport à v, on obtient

$$F(u,v) = \sqrt{uv} + K(u) + H(v)\ ,$$

où H et K sont deux fonctions arbitraires de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$. Ainsi

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2} + K(x+y) + H(x-y)\ .$$

---

11. En posant $\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{x}{y} \end{cases}$, résoudre sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ l'équation aux dérivées partielles

$$\textbf{(E) :} \qquad x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\ .$$

- -

Avertissement: Les détails de calcul seront omis afin de ne pas heurter les plus sensibles de nos lecteurs!

En posant $f(x,y) = g(u,v)$ avec $(u,v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ aussi, on calcule d'abord

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\,\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\,\frac{\partial g}{\partial v} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x\,\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{x}\,\frac{\partial g}{\partial v}\ .$$

Après quelques calculs, on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2\frac{y^2}{x^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + \frac{y^2}{x^4}\,\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2y}{x^3}\,\frac{\partial g}{\partial v}\ ,$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{x^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\ .$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\textbf{(E)} \quad &\iff \quad -4y^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + 2\frac{y}{x}\,\frac{\partial g}{\partial v} = 0 \\
&\iff \quad 2u\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial g}{\partial v} = 0 \\
&\iff \quad \frac{\partial G}{\partial u}(u,v) - \frac{1}{2u}\,G(u,v) = 0
\end{aligned}$$

en posant $G = \dfrac{\partial g}{\partial v}$. Posons maintenant $H(u,v) = \dfrac{G(u,v)}{\sqrt{u}}$. On voit que l'équation **(E)** se ramène alors à $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$, que l'on intègre en $H(u,v) = F(v)$, soit $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = G(u,v) = \sqrt{u}\,F(v)$, où $F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonction arbitraire de classe $\mathcal{C}^1$. On intègre de nouveau en $g(u,v) = \sqrt{u}\,A(v) + B(u)$, où A et B sont deux fonctions arbitraires de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. En revenant aux variables x et y initiales, on a donc

$$f(x,y) = \sqrt{xy}\,A\Big(\frac{y}{x}\Big) + B(xy)\ .$$

---

12. Soient a, b, c trois réels tels que $ac < 0$. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telles que

$$(\mathbf{E})\ :\qquad a\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2b\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + c\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\ .$$

Indication. On pourra utiliser un changement de variables affine du type $\begin{cases} u = \lambda\,x + y \\ v = \mu\,x + y \end{cases}$, où λ et μ sont deux réels convenablement choisis.

- -

Posons $f(x,y) = g(u,v)$, la règle de la chaîne permet le calcul des dérivées partielles de f considérée comme fonction composée, à savoir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x} = \lambda\,\frac{\partial g}{\partial u} + \mu\,\frac{\partial g}{\partial v}\ .$$

On passe au calcul d'une dérivée partielle seconde : en renommant F l'expression que l'on vient d'obtenir,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \lambda\,\Big(\lambda\,\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \mu\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}\Big) + \mu\,\Big(\lambda\,\frac{\partial^2 g}{\partial v\,\partial u} + \mu\,\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\Big) \\
&= \lambda^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\lambda\mu\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + \mu^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\ ,
\end{aligned}$$

puisque, f étant supposée de classe $\mathcal{C}^2$, les dérivées partielles secondes croisées sont égales (théorème de Schwarz). Par des calculs analogues, on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \lambda\,\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (\lambda+\mu)\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + \mu\,\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\ .$$

L'équation aux dérivées partielle **(E)** se transforme alors en

$$(\mathbf{E}') \ : \qquad A\,\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2B\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + C\,\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0\ , \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A &= a\lambda^2 + 2b\lambda + c \\ B &= a\lambda\mu + b(\lambda+\mu) + c \\ C &= a\mu^2 + 2b\mu + c \end{cases} .$$

Il est nécessaire d'avoir λ et μ distincts pour que le changement de variables $(x, y) \mapsto (u, v)$ soit bijectif. La condition $ac < 0$ entraîne $b^2 - ac > 0$, autrement dit le trinôme $aX^2 + 2bX + c$ admet deux racines réelles distinctes. Si l'on choisit pour λ et μ ces deux racines, on annule ainsi les coefficients A et C, mais pas le coefficient $B = \dfrac{2}{a}(ac - b^2)$, donc

$$(\mathbf{E}') \iff \frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} = 0 \iff \frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{\partial g}{\partial v}\Big) = 0 \iff \frac{\partial g}{\partial v} = \psi(v) \iff g(u, v) = \Psi(v) + \Phi(u)\ ,$$

où Φ et Ψ sont deux fonctions arbitraires de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. En revenant au couple de variables (x, y), les solutions de **(E)** sont les fonctions de la forme

$$f(x, y) = \Phi(\lambda x + y) + \Psi(\mu x + y)\ , \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}\ ,$$

Φ et Ψ étant deux fonctions arbitraires de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

NB : On peut remplacer la condition $ac < 0$ par la condition moins forte ($b^2 - ac > 0$ et $a \neq 0$), l'essentiel étant que le trinôme $aX^2 + 2bX + c$ admette deux racines réelles distinctes.

---

13. Trouver les fonctions $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telles que, en posant $f(x, y, z) = \varphi(r)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, la fonction f vérifie sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + kf = 0\ ,$$

où k est un réel donné.

- -

On recherche les fonctions propres de l'opérateur laplacien, qui sont à symétrie sphérique. Si $f(x, y, z) = \varphi(r)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, on obtient sur U les calculs de dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi'(r)\,\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\,\varphi'(r) = x \times \frac{1}{r} \times \varphi'(r)\ ,$$

puis, en dérivant cette expression par rapport à x comme un produit de trois facteurs :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{r}\,\varphi'(r) - \frac{x^2}{r^3}\,\varphi'(r) + \frac{x^2}{r^2}\,\varphi''(r)\ .$$

Les trois variables jouant le même rôle, on obtient des expressions analogues pour les autres dérivées partielles. On en déduit notamment l'expression du laplacien d'une fonction $\mathcal{C}^2$ à symétrie sphérique :

$$\Delta f(x, y, z) = \left(\frac{3}{r} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3}\right)\varphi'(r) + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}\,\varphi''(r) \ = \ \frac{2}{r}\,\varphi'(r) + \varphi''(r)\ .$$

L'équation $\Delta f + kf = 0$ se ramène à une équation différentielle ordinaire du second ordre :

$$r\,\varphi''(r) + 2\,\varphi'(r) + k\,r\,\varphi(r) = 0\ ,$$

laquelle n'est malheureusement pas à coefficients constants, mais le changement de fonction inconnue $\psi(r) = r\,\varphi(r)$ nous ramène à l'équation $\psi''(r) + k\,\psi(r) = 0$, que l'on sait discuter et résoudre. Allons-y :

- si $k = 0$, alors $\psi(r) = Ar + B$, donc $\varphi(r) = A + \dfrac{B}{r}$.
- si $k > 0$, posons $k = \omega^2$, alors $\psi(r) = A\,\cos(\omega r) + B\,\sin(\omega r)$, donc
$$\varphi(r) = A\,\frac{\cos(\omega r)}{r} + B\,\frac{\sin(\omega r)}{r}\ .$$
- si $k < 0$, posons $k = -\omega^2$, alors $\psi(r) = A\,\mathrm{ch}(\omega r) + B\,\mathrm{sh}(\omega r)$, donc
$$\varphi(r) = A\,\frac{\mathrm{ch}(\omega r)}{r} + B\,\frac{\mathrm{sh}(\omega r)}{r}\ .$$

---

14. On pose $S(x) = \displaystyle\int_0^\pi \cos(x\,\sin t)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que S est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad x\,S''(x) + S'(x) + x\,S(x) = 0$.

c. Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$. Pour $(x,y) \in U$, on pose $\varphi(x,y) = S\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et que $\Delta\varphi + \varphi = 0$, où Δ est le laplacien.

- -

a.. Posons $f(x,t) = \cos(x\,\sin t)$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\pi]$. Alors $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur le segment $[0,\pi]$ donc intégrable sur ce segment (pour tout x réel), et $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (pour tout t). Pour tout x réel, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)\,\sin(x\,\sin t)$ est continue sur le segment $[0,\pi]$ donc intégrable sur ce segment. Enfin,

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\pi] \qquad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = \big|-\sin^2(t)\,\cos(x\,\sin t)\big| \le 1\ ,$$

la fonction constante $t \mapsto 1$ étant intégrable sur le segment $[0,\pi]$, ce qui fournit une domination valide pour affirmer que S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour autoriser à dériver deux fois terme à terme, ce qui donne

$$S'(x) = -\int_0^\pi \sin(t)\cdot\sin(x\,\sin t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad S''(x) = -\int_0^\pi \sin^2(t)\cdot\cos(x\,\sin t)\,\mathrm{d}t\ .$$

b. On intègre par parties, par exemple en observant que

$$\begin{aligned} x\,\big(S''(x) + S(x)\big) &= \int_0^\pi x\,(1 - \sin^2 t)\,\cos(x\,\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \cos(t)\cdot\big(x\,\cos(t)\,\cos(x\,\sin t)\big)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \Big[\cos(t)\cdot\sin(x\ \sin t)\Big]_{t=0}^{t=\pi} + \int_0^{\pi} \sin(t)\cdot\sin(x\ \sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= -S'(x)\ , \end{aligned}$$

le crochet étant nul. C'est bien la relation voulue.

c. L'application φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. En posant $r = \sqrt{x^2+y^2}$, on a $\varphi(x,y) = S(r)$ et on calcule

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}\,\frac{\partial r}{\partial x} = S'(r)\,\frac{x}{r}\ ,$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(x\cdot\frac{S'(r)}{r}\Big) \\ &= \frac{S'(r)}{r} + x\cdot\frac{x}{r}\cdot\frac{r\,S''(r)-S'(r)}{r^2} \\ &= \Big(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\Big)\,S'(r) + \frac{x^2}{r^2}\,S''(r)\ , \end{aligned}$$

et une expression analogue pour $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$. Donc

$$\begin{aligned} \Delta\varphi+\varphi &= \Big(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\Big)\,S'(r) + \frac{x^2}{r^2}\,S''(r) + \Big(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\Big)\,S'(r) + \frac{y^2}{r^2}\,S''(r) + S(r) \\ &= S''(r) + \frac{1}{r}\,S'(r) + S(r) \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'après **b.**

Recherche d'extremums

15. Déterminer les extremums locaux sur $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) de

$f : (x,y) \mapsto x^2+xy+y^2-3x-6y$

$g : (x,y) \mapsto x^2+y^2-2xy-2y+5$

$h : (x,y) \mapsto x^3+y^3$

$k : (x,y) \mapsto x^3+y^3-3xy$

$l : (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2-2xyz$

- -

a. Le seul point critique de f est $a = (0,3)$. La matrice hessienne de f en a est $H_f(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, d'ailleurs indépendante de a. On constate que $\mathrm{tr}\big(H_f(a)\big) = 4 > 0$ et $\det\big(H_f(a)\big) = 3 > 0$, donc la matrice $H_f(a)$ est symétrique définie positive, et f présente un minimum local strict au point a, et c'est son seul extremum local.

Remarque. Dans cet exemple (f est une fonction polynomiale de degré 2), on peut aussi faire une translation des variables, i.e. placer la nouvelle origine au point critique, et alors constater que

$$f(h,3+k)-f(0,3)=h^2+hk+k^2=\Big(h+\frac{k}{2}\Big)^2+\frac{3}{4}k^2\geq 0\ ,$$

donc f admet un minimum global au point a.

b. Les équations $2x-2y=0$ et $2y-2x-2=0$ étant incompatibles, la fonction g n'a pas de point critique, donc a fortiori pas d'extremum local dans $\mathbb{R}^2$.

c. Le seul point critique de h est l'origine $(0,0)$. Comme $h(x,0)$ est du signe de x, $h(x,y)=h(x,y)-h(0,0)$ n'est pas de signe constant dans un voisinage de l'origine, donc h ne possède pas d'extremum local.

d. La recherche des points critiques de k s'écrit:

$$\nabla k(x,y)=0\iff\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{\partial k}{\partial x}(x,y)&=&0\\ \dfrac{\partial k}{\partial y}(x,y)&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}y=x^2\\ x=y^2\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}y=x^2\\ x=x^4\end{array}\right..$$

On obtient deux points critiques qui sont l'origine $O=(0,0)$, et le point $a=(1,1)$.

Comme $k(x,0)=x^3$ est du signe de x, $k(x,y)=k(x,y)-k(0,0)$ n'est pas de signe constant dans un voisinage de l'origine, donc l'origine n'est pas un extremum local. On peut remarquer aussi que la matrice hessienne de k en ce point est $H_k(O)=\begin{pmatrix}0&-3\\-3&0\end{pmatrix}$, matrice symétrique qui n'est ni positive ni négative puisque ses valeurs propres sont 3 et -3, donc k n'a pas d'extremum local en ce point.

On calcule $H_k(a)=\begin{pmatrix}6&-3\\-3&6\end{pmatrix}$, donc $\mathrm{tr}\big(H_k(a)\big)=12>0$, $\det\big(H_k(a)\big)=27>0$, la matrice hessienne de k en a est donc définie positive, on en déduit que la fonction k présente au point a un minimum local strict. Ce n'est pas un minimum global car la fonction k n'est pas minorée sur $\mathbb{R}^2$, on a en effet $\lim\limits_{x\to-\infty}k(x,0)=-\infty$.

e. Recherchons les points critiques de l : $\dfrac{\partial l}{\partial x}=2(x-yz)$, $\dfrac{\partial l}{\partial y}=2(y-zx)$ et $\dfrac{\partial l}{\partial z}=2(z-xy)$, on voit que $M(x,y,z)$ est un point critique si et seulement si $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&yz\\ y&=&zx\\ z&=&xy\end{array}\right.$. Ce système entraîne $y=yz^2$, soit $y(1-z)(1+z)=0$ donc :

- soit $y=0$, alors $x=z=0$, et $O\,(0,0,0)$ est un point critique ;

- soit $z=1$, alors $x=y$ et $z=x^2=1$, d'où $A\,(1,1,1)$ et $B\,(-1,-1,1)$ comme points critiques ;

- soit $z=-1$, alors $x=-y$ et $z=-x^2=-1$, d'où $C\,(1,-1,-1)$ et $D\,(-1,1,-1)$ comme points critiques ;

On a obtenu finalement cinq points critiques. Notons que la fonction l possède quelques symétries évidentes, comme

$$l(-x,-y,z)=l(x,-y,-z)=l(-x,y,-z)=l(x,y,z)\ ,$$

l'étude locale des points critiques B, C et D se déduira donc facilement de celle faite au point A.

• Étude locale au point O :

on a $H_l(O)=2I_3$, matrice définie positive, cela montre que l présente un minimum local au point O.

• Étude locale au point $A\ (1,1,1)$: on calcule $H_l(A)=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}=-2J+4I_3$, en notant J la matrice dont tous les coefficients valent 1. La matrice J ayant pour valeurs propres $\lambda=0$ (double) et $\mu=3$ (simple), on en déduit que les valeurs propres de $H_l(A)$ sont $-2\lambda+4=4$ (double) et $-2\mu+4=-2$ (simple), donc cette matrice symétrique n'est, ni positive, ni négative. Donc le point A n'est pas un extremum local de l. Par symétrie, il en est de même des points B, C et D.

---

16. Rechercher les extremums locaux sur $\mathbb{R}^2$ de $f:(x,y)\mapsto x\,e^y+y\,e^x$.

- -

Recherchons d'abord les éventuels points critiques. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}=e^y+ye^x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}=e^x+xe^y$. Donc

$$\nabla f(x,y)=0\iff\begin{cases} y &= -e^{y-x} \\ x &= -e^{x-y}\end{cases}\iff\begin{cases} y=\dfrac{1}{x} \quad (x\neq 0) \\ x+e^{x-\frac{1}{x}}=0\end{cases}.$$

Pour $x\in\mathbb{R}^*$, posons $\varphi(x)=x+e^{x-\frac{1}{x}}$, on note que φ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ (évident), et que $\varphi'(x)=1+\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)e^{x-\frac{1}{x}}$ est strictement positive sur chacun des deux intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}\varphi(x)=+\infty$, la fonction φ s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}_-^*$ et la racine “évidente” est -1.

Bilan. La fonction f admet pour unique point critique le point $A(-1,-1)$.

On va maintenant prouver que ce point n'est en fait pas un extremum local. Pour cela, étudions f sur deux droites passant par A, par exemple les parallèles aux deux bissectrices.

Sur la première bissectrice : posons $g(t)=f(-1+t,-1+t)=\dfrac{2}{e}(t-1)\,e^t$, une étude rapide montre que cette fonction admet un minimum local pour $t=0$ qui est bien sûr $g(0)=f(A)$.

Sur la parallèle à la deuxième bissectrice : posons $h(t)=f(-1+t,-1-t)=-\dfrac{2}{e}(\operatorname{ch}t+t\operatorname{sh}t)$, une étude non moins rapide montre que cette fonction admet un maximum local pour $t=0$.

Donc le point A est un ”point-col” pour f, ce n'est pas un extremum local.

Variante: La matrice hessienne de f en un point (x,y) est $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x & e^x+e^y \\ e^x+e^y & xe^y \end{pmatrix}$.

En le point critique A, on évalue $H_f(A) = e^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. On constate que $\det\big(H_f(A)\big) = -3e^{-2} < 0$, ce qui signifie que la matrice hessienne a une valeur propre strictement positive et une autre strictement négative, donc f n'admet pas d'extremum au point A.

---

17. Extremums locaux et globaux de $f : (x,y) \mapsto xy - \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{1}{x}$ sur $D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

- -

On recherche d'abord les points critiques de f sur le demi-plan ouvert D :

$$\mathrm{d}f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y - \dfrac{1}{x^2} & = 0 \\ x - y & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 & = 1 \\ y & = x \end{cases} \iff (x,y) = (1,1)\ .$$

Il y a donc un unique point critique dans D, à savoir $A(1,1)$. Pour voir si c'est un extremum local, étudions les applications partielles en ce point, soit $g : x \mapsto g(x) = f(x,1)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et $h : y \mapsto h(y) = f(1,y)$ sur $\mathbb{R}$.

On a $g(x) = x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}$, donc $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$, la fonction g est donc décroissante sur $]0,1]$, croissante sur $[1,+\infty[$, et elle admet au point 1 un minimum local.

On a $h(y) = y - \dfrac{y^2}{2} + 1$ donc $h'(y) = 1 - y$, la fonction h est donc croissante sur $]-\infty,1]$, décroissante sur $[1,+\infty[$, et elle admet au point 1 un maximum local.

On en déduit que le point $A = (1,1)$ n'est pas un extremum local de f, c'est un "point-col". Donc f n'admet aucun extremum local, ni *a fortiori* global sur le demi-plan ouvert D. On peut constater que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x,1) = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} f(1,y) = -\infty$, donc f n'est ni minorée ni majorée sur D.

Variante: Ici aussi, on peut conclure à l'aide de la matrice hessienne. En effet, $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. En particulier, $H_f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Comme $\det\big(H_f(A)\big) = -3 < 0$, la hessienne a deux valeurs propres de signes opposés (strictement), donc f n'a pas d'extremum local en le point A.

---

18. Soit $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\ ,\ y > 0\ ,\ x+y \leq 1\big\}$.

a. Montrer que D est une partie fermée bornée du plan.

b. Soient $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^a\, y^b\, (1-x-y)^c$. Montrer que f est continue sur D.

c. Déterminer $\max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$.

- -

a. La partie D est définie par des inégalités au sens large, donc est fermée (intersection de trois images réciproques de fermés de $\mathbb{R}$ par des applications continues). Elle est bornée car incluse dans le pavé $[0,1]^2$.

b. Les exposants a, b, c étant strictement positifs, l'application $t \mapsto t^a = e^{a\,\ln t}$ (et idem avec b ou c) est continue sur $\mathbb{R}_+$... une fois prolongée par la valeur 0 en 0. Ainsi f est continue sur D comme produit et composée de fonctions continues.

c. Comme f est continue sur la partie fermée bornée D, elle admet un maximum global sur D. Comme elle est nulle sur la frontière de D et strictement positive sur l'intérieur de D, ce maximum est atteint sur l'intérieur de D, qui est un ouvert. Le(s) point(s) en le(s)quel(s) ce maximum est atteint (il peut a priori être atteint en plusieurs points) est donc un point critique de f. Recherchons donc le(s) point(s) critique(s) de f sur $\overset{\circ}{D}$.

Le calcul, laissé au lecteur intrépide, donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^{a-1}\, y^b\, (1-x-y)^{c-1}\, \big[a(1-x-y) - cx\big]\ .$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^{a}\, y^{b-1}\, (1-x-y)^{c-1}\, \big[b(1-x-y) - cy\big]\ .$$

Le système $\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \ ;\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\right\}$ admet pour seule solution dans $\overset{\circ}{D}$ le couple $(x,y) = \left(\dfrac{a}{a+b+c}, \dfrac{b}{a+b+c}\right)$. Ce point, qui est le seul point critique de f dans $\overset{\circ}{D}$, est donc nécessairement le point en lequel le maximum global de f sur D est atteint. Ainsi,

$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = f\left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}\right) = \frac{a^a\, b^b\, c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}\ .$$

---

19. Déterminer $M = \max\limits_{(x,y)\in K} \big(\sin x\, \sin y\, \sin(x+y)\big)$, avec $K = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]^2$.

- -

La fonction $f : (x,y) \mapsto \sin x\, \sin y\, \sin(x+y)$ est continue sur la partie fermée bornée K, donc y admet un maximum.

Sur l'intérieur $U = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[^2$ de K, on calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(y)\, \sin(2x+y) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin(x)\, \sin(x+2y)\ .$$

Le seul point critique dans U, i.e. avec $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ et $0 < y < \dfrac{\pi}{2}$, est celui pour lequel $\begin{cases} 2x+y = \pi \\ x+2y = \pi \end{cases}$, soit le point $a = \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$. On calcule $f(a) = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

Pour montrer que cette valeur est le maximum de f sur K, il suffit de vérifier que $f(x,y) \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ sur la frontière $\mathrm{Fr}(K) = K \setminus U$. C'est clair pour $f(x,0) = 0$ lorsque $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, de même $f(0,y) = 0$ lorsque $y \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Puis, pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a

$$f\Big(x, \frac{\pi}{2}\Big) = \sin(x)\ \sin\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big) = \sin(x)\ \cos(x) = \frac{1}{2}\ \sin(2x) \leq \frac{1}{2} < \frac{3\sqrt{3}}{8}\ ,$$

et on a la même majoration pour $f\Big(\dfrac{\pi}{2}, y\Big)$ avec $y \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Finalement, $M = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

---

20. Rechercher les extremums locaux de $f : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ sur $\mathbb{R}^3$.

- -

Euh... c'est déjà fait dans l'exercice 15!!!

---

21. Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, soit $f : U \to \mathbb{R}$ une **fonction convexe**, i.e. telle que

$$\forall (x,y) \in U^2 \quad \forall \lambda \in [0,1] \qquad f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leq (1-\lambda)\, f(x) + \lambda\, f(y)\ ,$$

et de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que tout point critique de f est un minimum global.

- -

Soit $x \in U$ un point critique de f, on a donc $\nabla f(x) = 0$. Fixons $y \in U$, l'objectif est de montrer que $f(y) \geq f(x)$.
Pour $\lambda \in [0,1]$, posons $g(\lambda) = (1-\lambda)\, f(x) + \lambda\, f(y) - f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big)$.
Alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ comme composée avec

$$\forall \lambda \in [0,1] \qquad g'(\lambda) = f(y) - f(x) - \Big(\nabla f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big)\ \big|\ y - x\Big)\ .$$

Comme $g(0) = 0$ et $g \geq 0$ sur $[0,1]$, on a $g'(0) \geq 0$, soit $f(y) - f(x) \geq 0$, CQFD!

22*. Soit E un espace euclidien, soit $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$, soit $u \in \mathbb{R}^n$ un vecteur fixé. Pour tout $x \in E$, on pose $g(x) = \big(f(x) \mid x\big) - (u|x)$. Montrer que g admet un unique point critique et que g présente en ce point un minimum global. *On utilisera une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de u.*

- -

Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de f, rangées dans l'ordre croissant (au sens large: elles ne sont pas forcément distinctes), soit $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E telle que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, e_i est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i, donc $f(e_i) = \lambda_i\, e_i$. Si x est un vecteur de E, décomposons-le dans la base $\mathcal{B}$: $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a alors $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$, puis (calcul de produit scalaire dans une b.o.n.) :

$$\big(f(x) \mid x\big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, x_i^2 \ .$$

Décomposons aussi u dans la base $\mathcal{B}$: $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$. On a alors $g(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} u_i x_i$, ainsi cette expression peut être considérée comme fonction du n-uplet de réels $(x_1, \cdots, x_n)$, donc pour tout indice $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = 2 \, \lambda_j \, x_j - u_j \ .$$

Un “point” $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ est un point critique lorsque toutes les dérivées partielles sont nulles (i.e. le gradient de g au point x est nul), ce qui correspond à $x_j = \dfrac{u_j}{2\lambda_j}$ pour tout j, il y a donc un unique point critique v, donné par $v = \dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{u_i}{\lambda_i} \, e_i$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que $g(v) = \min_{x \in E} g(x)$, autrement dit que, pour tout $x \in E$, on a $g(x) \geq g(v)$. Or, un calcul facile donne $g(v) = -\dfrac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{u_i^2}{\lambda_i}$ et, pour $x \in E$ quelconque,

$$\begin{aligned} g(x) - g(v) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i x_i^2 - u_i x_i + \frac{1}{4} \, \frac{u_i^2}{\lambda_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{\lambda_i} \, x_i - \frac{1}{2} \, \frac{u_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right)^2 \ \geq \ 0 \ , \quad \texttt{cqfd} \end{aligned}$$

Courbes et surfaces

23. Soit la surface $\mathcal{S}$: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Existe-t-il des points de $\mathcal{S}$ en lesquels la normale est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v} = (1, 2, 3)$?

- -

$\mathcal{S}$ est la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$ avec $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -2z$, donc tout point de $\mathcal{S}$ est régulier (le seul point critique de f est $(0, 0, 0)$ qui n'appartient pas à $\mathcal{S}$). En tout point M (x, y, z) de $\mathcal{S}$, la normale est donc dirigée par le vecteur $\nabla f(M) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix}$. La normale en M est donc dirigée par $\overrightarrow{v}$ si et seulement si les vecteurs $\nabla f(M)$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, i.e. si et seulement s'il existe un réel λ tel que $\big\{ x = \lambda \ , \ y = 2\lambda \ , \ z = -3\lambda \big\}$. Mais le point M doit appartenir à $\mathcal{S}$, d'où l'équation

$\lambda^2 + (2\lambda)^2 - (-3\lambda)^2 = 1$, soit $-4\lambda^2 = 1$, qui n'a pas de solution. Il n'y a donc aucun point de $\mathcal{S}$ en lequel la normale est dirigée par $\overrightarrow{v}$.

Remarque. La surface $\mathcal{S}$ est un **hyperboloïde de révolution à une nappe**, c'est la forme des cheminées de centrales nucléaires.

---

24. Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $x^2 - y^2 + z^2 = 1$. Déterminer les points de $\mathcal{S}$ en lesquels le plan tangent est parallèle au plan $P\ :\ 2x + y - z = 0$.

- -

On recherche les points de $\mathcal{S}$ en lesquels la normale est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{S}$ est la surface d'équation $f(x,y,z) = 0$ avec $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -2z$, donc tout point de $\mathcal{S}$ est régulier (le seul point critique de f est $(0,0,0)$ qui n'appartient pas à $\mathcal{S}$). En tout point $M\ (x,y,z)$ de $\mathcal{S}$, la normale est donc dirigée par le vecteur $\nabla f(M) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix}$. La normale en M est donc dirigée par $\overrightarrow{v}$ si et seulement si les vecteurs $\nabla f(M)$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, i.e. si et seulement s'il existe un réel λ tel que $\big\{x = 2\lambda\ ,\ y = \lambda\ ,\ z = -\lambda\big\}$. Mais le point M doit appartenir à $\mathcal{S}$, d'où l'équation $(2\lambda)^2 - \lambda^2 + (-\lambda)^2 = 1$, soit $4\lambda^2 = 1$, qui a deux solutions, $\lambda = \dfrac{1}{2}$ et $\lambda = -\dfrac{1}{2}$. Il y a donc deux points de $\mathcal{S}$ en lesquels la normale est dirigée par $\overrightarrow{v}$, ce sont $M\left(1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ et son symétrique par rapport à O, soit $M'\left(-1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

---

25. Soit la surface $\mathcal{S}$ d'équation $3x^2 + y^2 + z^2 - 4yz = 0$. Trouver les plans tangents à $\mathcal{S}$ passant par le point $A\ (1,1,0)$.

- -

Posons $f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + z^2 - 4yz$. Le gradient de f est $\nabla f(x,y,z) = 2\begin{pmatrix} 3x \\ y - 2z \\ z - 2y \end{pmatrix}$.

On observe que l'origine, qui appartient à la surface $\mathcal{S}$, est un point critique de f (point non régulier), on ne peut donc (conformément au programme en tout cas) parler de plan tangent à $\mathcal{S}$ en ce point.

En un point $m_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de $\mathcal{S}$ autre que $(0,0,0)$, le plan tangent $\mathcal{T}_{m_0}$ admet pour équation cartésienne

(*) $$3x_0\,(x - x_0) + (y_0 - 2z_0)\,(y - y_0) + (z_0 - 2y_0)\,(z - z_0) = 0\ .$$

Ce plan passe par A si et seulement si

$$3x_0\,(1 - x_0) + (y_0 - 2z_0)\,(1 - y_0) + (z_0 - 2y_0)\,(-z_0) = 0\ ,$$

soit $3x_0+y_0-2z_0=0$. On reconnaît là l'équation d'un plan vectoriel P. On doit maintenant examiner si ce plan P rencontre la surface $\mathcal{S}$. En remplaçant y_0 par $2z_0-3x_0$ dans l'équation de $\mathcal{S}$: $3x_0^2+y_0^2+z_0^2-4y_0z_0=0$, on obtient $z_0^2-4x_0^2=0$, soit $z_0=\pm 2x_0$, les points d'intersection de $\mathcal{S}$ et de P sont les points $m_0=(x_0,y_0,z_0)$ tels que

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_0 &=& x_0 \\ z_0 &=& 2x_0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{rcl} y_0 &=& -7x_0 \\ z_0 &=& -2x_0 \end{array}\right. .$$

Autrement dit, l'intersection de la surface $\mathcal{S}$ avec le plan P est la réunion des deux droites vectorielles engendrées par les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-7\\-2\end{pmatrix}$ respectivement. Cela nous donne, en excluant l'origine, l'ensemble des points de $\mathcal{S}$ en lesquels le plan tangent passe par A.

On vérifie ensuite, en reportant dans **(*)** que, en tout point $m_0=(t,t,2t)$, avec $t\in\mathbb{R}^*$, le plan tangent à $\mathcal{S}$ est $P_1: x-y=0$ (indépendant de t). De même, en tout point $m_0=(t,-7t,-2t)$, avec $t\in\mathbb{R}^*$, le plan tangent à $\mathcal{S}$ est $P_2: 3x-3y+10z=0$ (indépendant de t). Il y a donc deux plans tangents à $\mathcal{S}$ et passant par A, ce sont les plans P_1 et P_2, chacun de ces plans est tangent à $\mathcal{S}$ en une infinité de points (tous les points d'une droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $(1,1,2)$ pour P_1, et $(1,-7,-2)$ pour P_2).

Quelques commentaires sur cette surface $\mathcal{S}$ pour mieux comprendre l'exercice: la surface $\mathcal{S}$ est définie par une équation homogène du second degré, "homogène" car tous les termes de l'équation sont de degré deux exactement, il n'y a pas de terme de degré 1 ou 0. La surface $\mathcal{S}$ est ce que l'on appelle un **cône du second degré**. *C'est un "cône" de sommet O car, si un point M, de coordonnées (x,y,z), appartient à $\mathcal{S}$, alors toute la droite (OM) est incluse dans $\mathcal{S}$, i.e. $\mathcal{S}$ contient tous les points de coordonnées (tx,ty,tz) avec t réel. La surface $\mathcal{S}$ est donc une réunion de droites passant par O. Le long d'une de ces droites, "génératrices" du cône, le plan tangent en M reste le même et contient la génératrice (OM).*

Pour la culture: Propriétés optiques des coniques.

a. On admet qu'une **parabole** $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M du plan vérifiant la relation $MF=d(M,\mathcal{D})$, où $\mathcal{D}$ (la **directice**) est une droite du plan, et F (le **foyer**) un point n'appartenant pas à $\mathcal{D}$. En déduire une construction point par point de la parabole $\mathcal{P}$ si $\mathcal{D}$ et F sont donnés. On note Δ la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ issue de F. Montrer que Δ est un axe de symétrie de $\mathcal{P}$. Montrer que, si un rayon lumineux incident arrive parallèle à cet axe Δ, alors le rayon réfléchi sur un miroir parabolique de forme $\mathcal{P}$ passe par le foyer F.

b. On admet qu'une **ellipse** $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M du plan vérifiant la relation $MF+MF'=2a$, où F et F' (les **foyers**) sont deux points distincts, et $a>0$ un paramètre (le **demi-grand axe**). En déduire une façon de tracer l'ellipse avec une ficelle si F, F' et a sont donnés. Montrer que, si l'on dispose d'un miroir elliptique de forme $\mathcal{E}$, alors tout rayon lumineux issu du foyer F se réfléchit vers l'autre foyer F'.

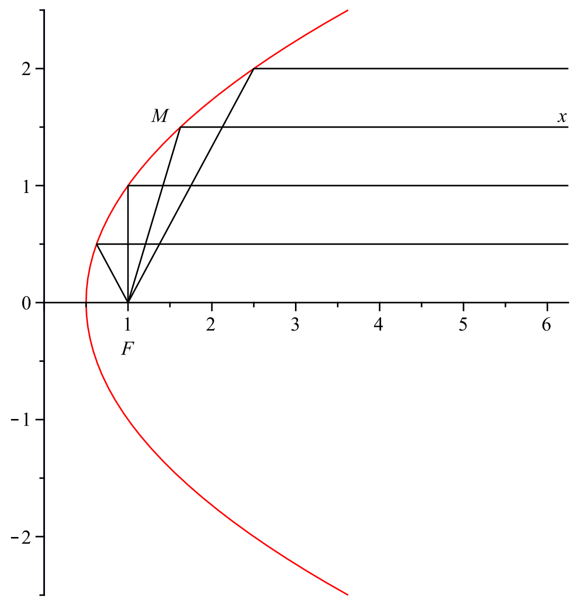
- -

a. Pour la construction point par point de la parabole, partir d'un point H quelconque sur la directrice $\mathcal{D}$, tracer la perpendiculaire δ à $\mathcal{D}$ issue de ce point, et marquer le point M à l'intersection de cette droite δ et de la médiatrice du segment $[HF]$; ce point M appartient alors à la parabole $\mathcal{P}$. En effet, son appartenance à la médiatrice de $[HF]$ donne l'égalité de distances $MH = MF$. Par ailleurs, H est son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$, donc $MH = d(M, \mathcal{D})$.

Les données du problème (le point F et la directrice $\mathcal{D}$) étant conservées par la symétrie d'axe Δ, il en est de même de la parabole $\mathcal{P}$.

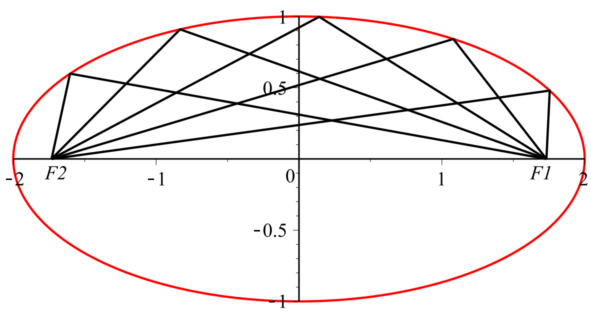
Donc $M \in \mathcal{P} \iff MF = d(M, \mathcal{D})$. La parabole est la ligne de niveau zéro de l'application $f : M \mapsto MF - d(M, \mathcal{D})$. Cette application f est définie sur la plan, et elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le plan privé du foyer F et de la directrice $\mathcal{D}$, son gradient en un point M du demi-plan de frontière $\mathcal{D}$ dans lequel se situe la parabole est $\nabla f(M) = \dfrac{\overrightarrow{FM}}{\|\overrightarrow{FM}\|} - \overrightarrow{e_1}$, où $\overrightarrow{e_1}$ est unitaire et dirige l'axe de la parabole. On peut s'en persuader en faisant le calcul analytique dans le cas correspondant au schéma, alors si M a pour coordonnées (x, y), on a $f(M) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} - |x|$.

En un point M de la parabole $\mathcal{P}$, le vecteur $\nabla f(M)$ dirige la normale à $\mathcal{P}$; or, ce vecteur étant écrit comme une différence de deux vecteurs unitaires, il dirige l'une des bissectrices des droites (MF) et (Mx) ce qui, en tenant compte des lois de la réflexion (angle de réflexion=angle d'incidence) montre que le rayon parallèle à l'axe est réfléchi vers le foyer.



b. On doit bien sûr avoir $2a > FF'$. Pour construire l'ellipse, on prend une ficelle de longueur $2a$ dont on fixe les extrémités en les points F et F', et on tend la ficelle avec un crayon que l'on fait "tourner" autour de F et F'. Le crayon va alors dessiner l'ellipse **E**, c'est le "théorème du jardinier".

L'ellipse $\mathcal{E}$ est donc la ligne de niveau $2a$ de l'application $g : M \mapsto MF + MF'$ définie sur le plan $\mathbb{R}^2$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{F, F'\}$. Son gradient est donné par $\nabla g(M) = \dfrac{\overrightarrow{FM}}{\|\overrightarrow{FM}\|} + \dfrac{\overrightarrow{F'M}}{\|\overrightarrow{F'M}\|}$. Comme dans le cas de la parabole, ce vecteur dirige la normale à l'ellipse $\mathcal{E}$ au point M, et comme il est écrit comme une somme de deux vecteurs unitaires, il dirige aussi la bissectrice des droites (MF) et (MF'). Ceci montre que tout rayon lumineux issu du foyer F va se réfléchir en direction du foyer F' (angle d'incidence=angle de réflexion). Les foyers sont notés F1 et F2 sur le schéma.



Un petit problème sur l'équation de la chaleur

27. On considérera, dans le plan $\mathbb{R}^2$, le demi-plan fermé $\Pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, ainsi que son intérieur qui est le demi-plan ouvert $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Une fonction $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et 2π-périodique, étant donnée, on dira qu'une fonction de deux variables $U : \Pi \to \mathbb{R}$ est **solution du problème** $\mathcal{P}(\Phi)$ si elle est continue sur Π, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω, et si elle vérifie

$$\begin{cases} \forall (x,t) \in \Omega & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,t) & \textbf{(1)} \\ \forall t \in \mathbb{R}_+ & U(0,t) = 0 & \textbf{(2)} \\ \forall x \in \mathbb{R} & U(x,0) = \Phi(x) & \textbf{(3)} \\ \forall (x,t) \in \Pi & U(x+2\pi,t) = U(x,t) & \textbf{(4)} \end{cases} .$$

Pour la culture, l'équation aux dérivées partielles **(1)** est l'**équation de la chaleur**.

Supposons que deux fonctions $U_1 : \Pi \to \mathbb{R}$ et $U_2 : \Pi \to \mathbb{R}$ soient solutions du problème $\mathcal{P}(\Phi)$. Soit $V = U_2 - U_1$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$G(t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} V(x,t)^2 \, \mathrm{d}x \ .$$

a. Montrer que la fonction G est continue sur $\mathbb{R}_+$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Prouver la relation

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad G'(t) = -\int_0^{2\pi} \Big(\frac{\partial V}{\partial x}(x,t) \Big)^2 \, \mathrm{d}x \ .$$

c. En déduire que G est nulle sur $\mathbb{R}_+$, puis que V est nulle sur Π.

Interprétation: la condition **(3)** *signifie qu'à l'instant $t = 0$, on connaît la température $\Phi(x)$ en chaque point d'abscisse x d'une tige rectiligne et on suppose, pour la commodité du calcul, que cette fonction Φ est 2π-périodique ("périodicité spatiale", condition* **(4)***). La condition* **(2)** *signifie par ailleurs que la température est maintenue constante, à 0°C par exemple, en le point d'abscisse 0 de la tige. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, le réel $U(x,t)$ est alors la température au point d'abscisse x de la tige à l'instant t. En admettant l'* **existence** *d'une solution au problème $\mathcal{P}(\Phi)$, cet exercice montre que l'évolution temporelle de la température en chaque point de la tige est entièrement déterminée.*

- -

a. Posons $w(x,t) = \dfrac{1}{2} V(x,t)^2$ pour $(x,t) \in [0,2\pi] \times \mathbb{R}_+$.

Attention! La signification des variables est inversée par rapport aux notations habituelles, i.e. ici le paramètre est la deuxième variable t, et la variable d'intégration est x.

Appliquons d'abord le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre:

- pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $x \mapsto w(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $[0,2\pi]$;

- pour tout $x \in [0,2\pi]$, l'application partielle $t \mapsto w(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;

- si $S = [a,b]$ est un segment inclus dans $\mathbb{R}_+$, i.e. si $0 \leq a < b$, alors la fonction de deux variables w est continue sur le pavé $[0,2\pi] \times [a,b]$ qui est une partie fermée bornée du plan ; d'après le théorème des bornes atteintes, elle est alors bornée sur cette partie, i.e.

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall (x,t) \in [0,2\pi] \times S \qquad \big| w(x,t) \big| \leq M \ .$$

La fonction constante $x \mapsto M$ étant intégrable sur le segment $[0,2\pi]$, ceci est une condition de domination valide pour appliquer le théorème de continuité.

On en déduit la continuité de G sur $\mathbb{R}_+$.

Appliquons maintenant le théorème de dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre:

- pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $x \mapsto w(x,t)$ est continue sur $[0,2\pi]$, donc intégrable sur cet intervalle puisque c'est sur un segment ;

- pour tout $x \in [0,2\pi]$, l'application partielle $t \mapsto w(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et on calcule

$$\forall (x,t) \in [0,2\pi] \times \mathbb{R}_+^* \qquad \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2} \, \frac{\partial}{\partial t}\big(V(x,t)^2\big) = V(x,t) \, \frac{\partial V}{\partial t}(x,t) \ .$$

- si $S=[a,b]$ est un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, i.e. si $0<a<b$, alors la fonction de deux variables $(x,t)\mapsto \dfrac{\partial w}{\partial t}(x,t)$ explicitée ci-dessus est continue sur le pavé $[0,2\pi]\times[a,b]$ qui est une partie fermée bornée du plan ; d'après le théorème des bornes atteintes, elle est alors bornée sur cette partie, i.e.

$$\exists M'\in\mathbb{R}_+\quad \forall (x,t)\in[0,2\pi]\times S\qquad \left|\frac{\partial w}{\partial t}(x,t)\right|\leq M'\ .$$

La fonction constante $x\mapsto M'$ étant intégrable sur le segment $[0,2\pi]$, ceci est une condition de domination valide pour appliquer le théorème de dérivation.

On en déduit que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Le théorème donne aussi la relation

$$\forall (x,t)\in[0,2\pi]\times\mathbb{R}_+^*\qquad G'(t)=\int_0^{2\pi}\frac{\partial w}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}V(x,t)\,\frac{\partial V}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x\ .$$

b. De la relation **(1)**, on déduit que l'on a aussi $G'(t)=\displaystyle\int_0^{2\pi}V(x,t)\,\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}x$. Une intégration par parties donne alors

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*\qquad G'(t)=\left[V(x,t)\,\frac{\partial V}{\partial x}(x,t)\right]_{x=0}^{x=2\pi}-\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial x}(x,t)\right)^2\mathrm{d}x=-\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial x}(x,t)\right)^2\mathrm{d}x\ ,$$

le terme entre crochets étant nul puisque la fonction V est 2π-périodique par rapport à la variable x d'après l'hypothèse **(4)**, et il en est alors de même de sa dérivée partielle $\dfrac{\partial V}{\partial x}$, et donc du produit $V\,\dfrac{\partial V}{\partial x}$.

c. La fonction G est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $G'\leq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après l'expression obtenue en **b.**, elle est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc

$$\forall t\in\mathbb{R}_+\qquad G(t)\leq G(0)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}V(x,0)^2\,\mathrm{d}x=0\quad \text{d'après } \mathbf{(3)}\ .$$

Mais la définition même de $G(t)$ montre que $G(t)\geq 0$. Finalement, la fonction G est nulle sur $\mathbb{R}_+$, i.e.

$$\forall t\in\mathbb{R}_+\qquad \int_0^{2\pi}V(x,t)^2\,\mathrm{d}x=0\ .$$

Si l'on fixe $t\geq 0$, l'application partielle $x\mapsto V(x,t)^2$ est positive et continue sur le segment $[0,2\pi]$ et d'intégrale nulle sur ce segment. On déduit du théorème de stricte positivité que, pour tout $t\geq 0$, pour tout $x\in[0,2\pi]$, $V(x,t)=0$. Enfin, la 2π-périodicité de V par rapport à la variable x (condition **(4)**) permet de conclure que la fonction V est nulle sur $\Pi=\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$.