DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 7

PSI2 2023-2024 **Durée: 4 heures** **23/03/2024**

PROBLÈME 1

Une marche aléatoire

On considère deux entiers naturels non nuls M et A avec $M \geq 2$. On dispose d'un plateau de jeu infini avec des cases numérotées par les entiers naturels. Un pion se trouve initialement sur la case numérotée 0, et le jeu se termine dès que le pion se trouve sur une case portant un numéro supérieur ou égal à l'entier A. À chaque tour de jeu, le joueur (à l'aide d'un dé ou d'un générateur aléatoire) tire, de façon équiprobable, un élément de l'intervalle entier $[\![0, M-1]\!]$ et il avance alors le pion du nombre de cases égal au numéro tiré.

L'objectif est de faire une étude probabiliste du nombre de tours nécessaires pour terminer la partie.

Pour modéliser cette situation, on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suivent toutes la loi uniforme sur $[\![0, M-1]\!]$. On introduit alors les variables aléatoires S_n définies par $S_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \; .$$

On admet que l'on définit bien une variable aléatoire T sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ en convenant que, pour tout $\omega \in \Omega$,

- si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n(\omega) < A$, alors $T(\omega) = 0$;

- sinon, $T(\omega) = \min\big\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n(\omega) \geq A\big\}$.

On calculera l'espérance de T dans deux cas particuliers.

Partie A. Préliminaires

A.1. Modélisation

a. Que représentent les variables S_n et X_n, avec $n \in \mathbb{N}^*$ donné, dans le contexte de la situation présentée ?

b. Que représente la variable aléatoire T ?

A.2. Un calcul sur des séries entières

Pour $x \in \,]-1, 1[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et que

$$\forall x \in \,]-1,1[\quad \forall p \in \mathbb{N} \qquad f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}} \; .$$

b. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq p} \binom{n}{p} x^n$.

c. Soit $p \in \mathbb{N}$. Prouver la relation

$$\forall x \in \,]-1,1[\qquad \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}} \; .$$

B. Étude d'un premier cas

Dans cette partie **B.** uniquement, on suppose que $M = 2$.

B.1. Études de lois de variables aléatoires

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$.

b. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire T, i.e. l'ensemble $T(\Omega)$?

c. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq A$. Exprimer l'événement $\{T = k\}$ en fonction des événements $\{S_{k-1} = A - 1\}$ et $\{X_k = 1\}$. En déduire que

$$P(T = k) = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k} .$$

d. Calculer $P(T = 0)$.

B.2. Espérance de la variable aléatoire T

On notera G_T la fonction génératrice de la variable aléatoire T, définie par $G_T(x) = \mathrm{E}(x^T)$ pour tout réel x tel que la variable x^T soit d'espérance finie.

a. Montrer que G_T est la somme d'une série entière dont on déterminera le rayon de convergence R_T, et que

$$\forall x \in]-R_T, R_T[\qquad G_T(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^A .$$

b. En déduire le nombre moyen de tours pour terminer notre jeu.

c. Montrer que la loi de T est celle d'une somme de A variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi usuelle que l'on précisera. En déduire la variance $\mathrm{V}(T)$.

C. Étude d'un deuxième cas

Dans cette partie **C.** seulement, on suppose que $A \leq M$.

C.1. Un calcul de probabilités

a. On rappelle que, par convention, $\binom{n}{p}$ est nul lorsque $p > n$. On rappelle aussi la **formule de Pascal**: si n et p sont deux entiers naturels, $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$.

Prouver alors la relation

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \qquad \sum_{l=0}^{k} \binom{n+k-l}{n} = \binom{n+k+1}{n+1} .$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. En considérant le système complet d'événements $\big(\{X_{n+1} = j\}\big)_{0 \leq j \leq M-1}$, montrer que

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!] \qquad P(S_{n+1} \leq k) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{k} P(S_n \leq k - l) .$$

c. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!] \qquad P(S_n \leq k) = \frac{1}{M^n} \binom{n+k}{k} .$$

C.2. Calcul de l'espérance de T

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver l'égalité d'événements $\{T \geq n\} = \{S_{n-1} \leq A - 1\}$.

b. En déduire l'espérance $\mathrm{E}(T)$.

PROBLÈME 2

Fonctions convexes de plusieurs variables

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite **convexe** si elle vérifie

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad \forall t \in [0,1] \qquad f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)\, f(x) + t\, f(y)\ .$$

Dans tout le problème, si $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on identifiera le vecteur x avec la matrice-colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pourra alors considérer la matrice-ligne $x^\top = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice carrée d'ordre n, on pourra considérer des expressions comme $Ax \in \mathbb{R}^n \simeq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ou $x^\top A x$ qui est un réel. On notera enfin $(x|y) = x^\top y$ le produit scalaire usuel de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$.

PARTIE A. Exemples

1. Soit N une quelconque norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe.

2. Dans cette question, $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est une matrice carrée d'ordre n, symétrique. On considère l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad f(x) = x^\top S x\ .$$

a. Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ et t réel. Montrer que $x^\top S y = y^\top S x$, puis prouver la relation

$$(1-t)\, f(x) + t\, f(y) - f\big((1-t)x + ty\big) = t(1-t)\ (x-y)^\top S (x-y)\ .$$

b. En déduire que l'application f est convexe si et seulement si $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

PARTIE B. Caractérisation des fonctions convexes de classe $\mathcal{C}^1$

Dans toute cette partie, on considère une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On notera ∇f son **gradient**, défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \in \mathbb{R}^n\ .$$

Si $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$, on définit les applications $\varphi_{x,y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\psi_{x,y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi_{x,y}(t) = f\big((1-t)x + ty\big) \qquad \text{et} \qquad \psi_{x,y}(t) = (1-t)\, f(x) + t\, f(y) - \varphi_{x,y}(t)\ .$$

3. Montrer que les applications $\varphi_{x,y}$ et $\psi_{x,y}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner des expressions de leurs dérivées faisant intervenir le gradient de f.

4. Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$. Prouver l'égalité

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \Big(\nabla f\big((1-t)x + ty\big)\ \big|\ y - x \Big)\, \mathrm{d}t\ .$$

5. Dans cette question, on suppose que f est convexe. Déterminer le signe de $\psi'_{x,y}(0)$. En déduire la relation

$$\Big(\nabla f(x)\ \big|\ y - x \Big) \leq f(y) - f(x)\ .$$

6. En déduire que, si f est convexe, alors tout point critique de f est un minimum global de f.

7. (Réciproque de la question **5.**) On suppose que l'on a

$$(\mathbf{H}) : \qquad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \qquad \Big(\nabla f(x) \;\big|\; y-x\Big) \leq f(y) - f(x) \;,$$

on voudrait montrer que f est convexe. On se donne $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0,1]$, et on pose $c = (1-t)a + tb$.

a. Écrire la relation **(H)** en substituant au couple (x,y) le couple (c,a), puis le couple (c,b).

b. En déduire que f est convexe.

8. Dans cette question, on suppose de nouveau que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et convexe. Prouver que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \qquad \big(\nabla f(y) - \nabla f(x) \;\big|\; y-x\big) \geq 0 \;.$$

PARTIE C. Fonctions convexes de classe $\mathcal{C}^2$

On suppose maintenant que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$. En tout point x de $\mathbb{R}^n$, on définit la **matrice hessienne** de f en x, notée $H_f(x)$, par

$$H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;.$$

Cette matrice hessienne est symétrique d'après le théorème de Schwarz.

L'objectif de cette partie est de prouver que f est convexe sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si, pour tout point x de $\mathbb{R}^n$, la matrice symétrique $H_f(x)$ est positive.

9. Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la fontion $\varphi_{x,y}$ introduite dans la **PARTIE B** est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et prouver la relation

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi''_{x,y}(t) = (y-x)^\top \cdot H_f\big((1-t)x + ty\big) \cdot (y-x) \;.$$

10. On suppose dans cette question que, pour tout point x de $\mathbb{R}^n$, la matrice symétrique $H_f(x)$ est positive. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à l'application $\varphi_{x,y}$ entre les bornes 0 et 1, et en utilisant la question **7.**, montrer que f est convexe.

11. Montrer que la fonction $f : (x_1, x_2) \mapsto \ln(e^{x_1} + e^{x_2})$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

12. Dans cette question, on suppose que f est convexe.

a. Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, soient t_1 et t_2 deux réels tels que $t_1 < t_2$. En utilisant la question **8.**, montrer que $\varphi'_{x,y}(t_1) \leq \varphi'_{x,y}(t_2)$.

b. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $H_f(x) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.