CORRIGÉ du D.S. de MATHÉMATIQUES numéro 7
PSI2 2023-2024

PROBLÈME 1

Une marche aléatoire (*extrait de CCINP 2023 PC*)

Partie A. Préliminaires

A.1.a. Pour tout n entier naturel non nul, X_n représente le numéro tiré au n-ième tour de jeu, cette variable suit donc la loi uniforme sur $[\![0, M-1]\!]$. Et S_n indique le numéro de la case sur laquelle se trouve le pion après n tours de jeu.

b. La variable T est un "temps d'attente", elle représente (*si on fait abstraction de sa définition un peu artificielle dans le cas où la partie ne se termine pas en un temps fini*) le nombre de tours nécessaires pour terminer la partie.

A.2.a. Le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de f est immédiat et le calcul des dérivées successives se fait par une récurrence immédiate dont les détails sont laissés à l'improbable lecteur.

b. Posons $a_n = \binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ pour $n \geq p$. Alors $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{n+1-p} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, la série entière proposée admet pour rayon de convergence $R = 1$.

c. La fonction somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et peut être dérivée terme à terme, on obtient alors, pour $x \in\,]-1,1[$

$$f^{(p)}(x) = \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}\left(\sum_{n=p}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)x^{n-p} = p!\ \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p}\ x^{n-p}\ .$$

En multipliant par x^p et en divisant par $p!$, on déduit de **a.** que

$$\forall x \in\,]-1,1[\qquad \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p}\ x^n = \frac{x^p}{p!}\ f^{(p)}(x) = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}\ .$$

Partie B. Étude d'un premier cas

B.1.a. Si $M = 2$, chaque variable X_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. La variable S_n est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $\dfrac{1}{2}$, donc $S_n \sim \mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

b. Le pion avançant au plus d'une case à chaque tour, il lui faut au moins A tours pour arriver à la case numérotée A. Ayant convenu de poser $T = 0$ si la partie ne se termine pas, on a $T(\Omega) = \{0\} \cup [\![A, +\infty[\![$.

c. Clairement, $\{T = k\} = \{S_{k-1} = A-1\} \cap \{X_k = 1\}$. En effet, le pion avançant au plus d'une case à chaque tour, il est pour la première fois sur la case A après k tours (c'est l'événement $\{T = k\}$) si et seulement s'il était sur la case $A-1$ après $k-1$ tours (événement $\{S_{k-1} = A-1\}$) et s'il a avancé d'une case au k-ième tour (événement $\{X_k = 1\}$).

Ces deux événements sont indépendants (*en effet, les variables $X_1, \cdots, X_k$ sont mutuellement indépendantes, il résulte alors du lemme des coalitions que les variables $S_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} X_i$ et X_k sont indépendantes, les événements "associés" sont alors indépendants*).

Comme $S_{k-1} \sim \mathcal{B}\left(k-1, \dfrac{1}{2}\right)$, on a donc

$$P(T = k) = P(S_{k-1} = A-1)\ P(X_k = 1) = \binom{k-1}{A-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{A-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{(k-1)-(A-1)} \times \frac{1}{2} = \binom{k-1}{A-1}\frac{1}{2^k}\ .$$

d. On calcule

$$\sum_{k=A}^{+\infty} P(T=k) = \sum_{k=A}^{+\infty} \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k} = \sum_{n=A-1}^{+\infty} \binom{n}{A-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{A-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^A} = 1$$

en utilisant la question **A.2.c.**, autrement dit $P\left(\bigsqcup_{k\geq A} \{T=k\}\right) = 1$. L'événement contraire $\{T=0\}$ est donc négligeable.

B.2.a. Comme $T(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et que $P(T=k) = 0$ pour $k < A$, la formule du transfert donne

$$G_T(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(T=k)\, x^k = \sum_{k=A}^{+\infty} P(T=k) x^k = \sum_{k=A}^{+\infty} \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}\, x^k$$

pour tout réel x tel que cette dernière série soit absolument convergente. En posant $b_k = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}$, on vérifie facilement que $\lim_{k\to+\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{1}{2}$, donc G_T est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R_T = 2$ et, par un calcul très proche de celui de **B.1.d.**, on obtient, à l'aide de **A.2.c.**:

$$\forall x \in]-2,2[\qquad G_T(x) = \sum_{n=A-1}^{+\infty} \binom{n}{A-1} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} = \frac{x}{2} \times \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{A-1}}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^A} = \left(\frac{x}{2-x}\right)^A .$$

b. La fonction génératrice est dérivable sur $]-2,2[$, donc en particulier au point 1, ce qui montre d'après le cours que T est d'espérance finie et que $\mathrm{E}(T) = G_T'(1)$. On calcule $G_T'(x) = \frac{2A\, x^{A-1}}{(2-x)^{A+1}}$ pour $x \in]-2,2[$, puis $\mathrm{E}(T) = G_T'(1) = 2A$.

c. Si une variable Y suit la loi géométrique de rapport $\frac{1}{2}$, alors $G_Y(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x}{1-\frac{1}{2}x} = \dfrac{x}{2-x}$.

Si $Y_1, \cdots, Y_A$ sont A variables indépendantes suivant cette même loi géométrique, la somme $Z = \sum_{k=1}^{A} Y_k$ a pour fonction génératrice $G_Y^A = G_T$, donc T et Z ont la même loi (la fonction génératrice détermine la loi). Dans ce contexte, chacune des X_k a pour variance $\frac{q}{p^2}$ avec $p = q = \frac{1}{2}$, donc $\mathrm{V}(Y_k) = 2$ pour tout k. De l'indépendance des Y_k, on déduit que $\mathrm{V}(T) = \mathrm{V}(Z) = 2A$.

Remarque. En fait, la variable T se décompose elle-même en une somme de A variables géométriques indépendantes qu'il est facile d'interpréter. En effet, à chaque tour de jeu, on tire soit 0 ("échec": le pion ne bouge pas), soit 1 ("succès": le pion avance d'une case), avec équiprobabilité. On peut alors poser $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_A$, où T_1 est le temps d'attente du premier succès, T_2 le temps séparant le deuxième succès du premier, et ainsi de suite. La variable T peut donc être interprétée comme le "temps d'attente du A-ième succès".

Partie C. Étude d'un deuxième cas

C.1.a. La formule de Pascal permet de se ramener à une somme télescopique:

$$\sum_{k=0}^{l}\binom{n+k-l}{n}=\sum_{k=0}^{l}\left[\binom{n+k-(l-1)}{n+1}-\binom{n+k-l}{n+1}\right]=\binom{n+k+1}{n+1}-\binom{n}{n+1},$$

le coefficient $\binom{n}{n+1}$ étant nul. Cela fournit la relation demandée.

b. Appliquons la formule des probabilités totales dans sa première forme (i.e. sans introduire de probabilités conditionnelles) puisque $\big(\{X_{n+1}=j\}\big)_{0\le j\le M-1}$ est un système complet d'événements:

$$\begin{aligned}P(S_{n+1}\le k) &= \sum_{j=0}^{M-1}P(S_{n+1}\le k\ ,\ X_{n+1}=j)\\ &= \sum_{j=0}^{k}P(S_n\le k-j\ ,\ X_{n+1}=j)\\ &= \sum_{j=0}^{k}P(S_n\le k-j)\,P(X_{n+1}=j)\\ &= \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{k}P(S_n\le k-j)\ .\end{aligned}$$

On a effet facilement l'égalité d'événements

$$\{S_{n+1}\le k\}\ \cap\ \{X_{n+1}=j\}=\{S_n\le k-j\}\ \cap\ \{X_{n+1}=j\}\ .$$

On utilise ensuite l'indépendance des variables S_n et X_{n+1}, qui résulte du lemme des coalitions.

c. Pour $n=0$, comme S_0 est la variable constante nulle, $P(S_0\le k)=1=\dfrac{1}{M^0}\dbinom{k}{k}$, la relation est exacte. Même si ce n'est pas strictement nécessaire, regardons pour $n=1$.

Pour $n=1$, $P(S_1\le k)=P(X_1\le k)=\dfrac{k+1}{M}=\dfrac{1}{M}\dbinom{k+1}{k}$, la relation est exacte.

Supposons la relation exacte au rang n, avec $n\in\mathbb{N}$ donné. Alors, pour tout $k\in[\![0,A-1]\!]$,

$$P(S_{n+1}=k)=\frac{1}{M}\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{M^n}\binom{n+k-l}{n}=\frac{1}{M^{n+1}}\sum_{l=0}^{k}\binom{n+k-l}{n}=\frac{1}{M^{n+1}}\binom{n+1+k}{k}$$

en utilisant la relation du **a.** et la propriété de symétrie des coefficients binomiaux, l'hérédité est donc prouvée.

C.2.a. Si $k\in\mathbb{N}$, l'événement $\{T>k\}$ signifie qu'après k tours, la case numérotée A n'a toujours pas été atteinte, donc $\{T>k\}=\{S_k<A\}$, soit encore $\{T\ge k+1\}=\{S_k\le A-1\}$. En posant $n=k+1$, on a $\{T\ge n\}=\{S_{n-1}\le A-1\}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Remarque. En toute rigueur, on a $\{S_{n-1} \leq A-1\} = \{T \geq n\} \sqcup \{T=0\}$, mais ce dernier événement étant négligeable, cela ne modifie pas le calcul des probabilités.

b. Appliquons la formule de calcul de l'espérance pour une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(T) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(T \geq n) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} P(S_{n-1} \leq A-1) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n \leq A-1) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{M^n} \binom{n+A-1}{A-1} \\
&= \sum_{p=A-1}^{+\infty} \frac{1}{M^{p-A+1}} \binom{p}{A-1} \\
&= M^{A-1} \sum_{p=A-1}^{+\infty} \binom{p}{A-1} \left(\frac{1}{M}\right)^p \\
&= M^{A-1} \frac{\left(\frac{1}{M}\right)^{A-1}}{\left(1-\frac{1}{M}\right)^A} \\
&= \left(\frac{M}{M-1}\right)^A ,
\end{aligned}
$$

toujours en utilisant la relation démontrée en **A.2.c.**

PROBLÈME 2

Fonctions convexes de plusieurs variables (*d'après de vieux manuscrits*)

PARTIE A. Exemples

1. Il résulte de l'inégalité triangulaire et de l'axiome d'homogénéité que, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0,1]$,

$$N\big((1-t)x+ty\big) \leq N\big((1-t)x\big) + N(ty) = (1-t)\,N(x) + t\,N(y) ,$$

donc l'application N est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

2.a. La matrice S est symétrique, donc $S^\top = S$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$, l'expression $x^\top Sy$ est un réel donc coïncide avec sa transposée, soit

$$x^\top Sy = \big(x^\top Sy\big)^\top = y^\top S^\top (x^\top)^\top = y^\top S^\top x = y^\top Sx .$$

Ensuite, avec $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0,1]$, on a

$$
\begin{aligned}
(1-t)\,f(x) + t\,f(y) - f\big((1-t)x+ty\big) &= (1-t)\,x^\top Sx + t\,y^\top Sy - \big((1-t)x+ty\big)^\top S\,\big((1-t)x+ty\big) \\
&= \big[(1-t)-(1-t)^2\big]\,x^\top Sx - 2t(1-t)\,x^\top Sy + (t-t^2)\,y^\top Sy \\
&= t(1-t)\,(x^\top Sx - 2\,x^\top Sy + y^\top Sy) \\
&= t(1-t)\,(x-y)^\top S\,(x-y) .
\end{aligned}
$$

b. • Si $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, les expressions $(x-y)^\top S\,(x-y)$ sont toujours positives, on déduit immédiatement du calcul fait en **a.** que f est convexe.

• Réciproquement, si f est convexe, alors l'expression $t(1-t)\,(x-y)^\top S\,(x-y)$ doit être un réel positif, et ceci pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et pour tout $t \in [0,1]$. En prenant t dans $]0,1[$, on voit que $(x-y)^\top S\,(x-y)$ doit toujours être positif. En posant $z = x-y$, alors le vecteur z décrit $\mathbb{R}^n$ tout entier, on doit avoir $z^\top Sz = (z|Sz) \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}^n$donc la matrice symétrique S est positive.

PARTIE B. Caractérisation des fonctions convexes de classe $\mathcal{C}^1$.

3. Fixons $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$ et considérons l'application $\alpha_{x,y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}^n \qquad \alpha_{x,y}(t) = (1-t)x + ty = x + t(y-x)\ .$$

Cette application "affine" $\alpha_{x,y}$ (de variable réelle, à valeurs vectorielles) est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\alpha'_{x,y}(t) = y - x$. *Elle correspond à l'idée cinématique d'un mouvement rectiligne uniforme passant par le point x à l'instant $t = 0$ et par le point y à l'instant $t = 1$.* L'application $\varphi_{x,y} = f \circ \alpha_{x,y}$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Les règles de dérivation étudiées en cours ("dérivation le long d'un arc", "arc" qui est ici une droite affine) donnent

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi'_{x,y}(t) = \Big(\nabla f\big(\alpha_{x,y}(t)\big)\ \big|\ \alpha'_{x,y}(t)\Big) = \Big(\nabla f\big((1-t)x + ty\big)\ \big|\ y - x\Big)\ .$$

Enfin, l'application $t \mapsto (1-t)\,f(x) + t\,f(y)$ est une "simple" application affine de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, de dérivée constante $f(y) - f(x)$, donc par différence, $\psi_{x,y}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \psi'_{x,y}(t) = f(y) - f(x) - \Big(\nabla f\big((1-t)x + ty\big)\ \big|\ y - x\Big)\ .$$

4. De la question **3.**, on déduit immédiatement que

$$\int_0^1 \Big(\nabla f\big((1-t)x + ty\big)\ \big|\ y - x\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \varphi'_{x,y}(t)\,\mathrm{d}t = \varphi_{x,y}(1) - \varphi_{x,y}(0) = f(y) - f(x)\ .$$

5. Si f est convexe, alors l'application $\psi_{x,y}$ prend des valeurs positives sur le segment $[0,1]$. Comme elle est dérivable et que $\psi_{x,y}(0) = 0$, on en déduit que $\psi'_{x,y}(0) \geq 0$. *En effet, les taux de variation* $\dfrac{\psi_{x,y}(t) - \psi_{x,y}(0)}{t - 0} = \dfrac{\psi_{x,y}(t)}{t}$, *pour* $t \in\,]0,1]$, *sont positifs donc, par passage à la limite,* $\psi'_{x,y}(0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\psi_{x,y}(t)}{t} \geq 0$. Or, le calcul de la question **3.** montre que $\psi'_{x,y}(0) = f(y) - f(x) - \big(\nabla f(x)\ |\ y - x\big)$. On en déduit l'inégalité

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \qquad \big(\nabla f(x)\ |\ y - x\big) \leq f(y) - f(x)\ .$$

6. Si f est convexe de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et si x est un point critique de f, i.e. $\nabla f(x) = 0$, on a alors pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $f(y) - f(x) \geq \Big(\nabla f(x)\ \big|\ y - x\Big) = 0$, donc $f(y) \geq f(x)$. Ainsi, f présente au point x un minimum global.

7.a. On remplace, cela donne

$$(\mathbf{H1}) : \qquad \Big(\nabla f(c) \;\Big|\; a-c\Big) \leq f(a) - f(c) \;,$$

et

$$(\mathbf{H2}) : \qquad \Big(\nabla f(c) \;\Big|\; b-c\Big) \leq f(b) - f(c) \;.$$

b. Soit $t \in [0,1]$. On effectue la combinaison linéaire (à coefficients positifs, ce qui conserve donc les inégalités larges): $(1-t)\,(\mathbf{H1}) + t\,(\mathbf{H2})$, et par linéarité à droite du produit scalaire figurant dans le premier membre, on obtient

$$\big(\nabla f(c) \;\big|\; (1-t)(a-c) + t\,(b-c)\big) \leq (1-t)\,f(a) + t\,f(b) - \big((1-t)+t\big)\,f(c) \;.$$

Comme $(1-t)(a-c) + t\,(b-c) = (1-t)a + tb - c = 0$, on a obtenu

$$0 \leq (1-t)\,f(a) + t\,f(b) - f(c) = (1-t)\,f(a) + t\,f(b) - f\big((1-t)a + tb\big) \;,$$

ce qui prouve la convexité de f (cette relation étant satisfaite pour tous $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0,1]$).

8. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et convexe, alors pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a

$$\big(\nabla f(x) \mid y-x\big) \leq f(y) - f(x) \qquad \text{et} \qquad \big(\nabla f(y) \mid x-y\big) \leq f(x) - f(y) \;.$$

En ajoutant les deux, il vient $\big(\nabla f(x) - \nabla f(y) \mid y-x\big) \leq 0$, soit

$$\big(\nabla f(y) - \nabla f(x) \mid y-x\big) \geq 0 \;.$$

PARTIE C. Fonctions convexes de classe $\mathcal{C}^2$.

9. On a $\varphi_{x,y} = f \circ \alpha_{x,y}$ (notation introduite dans le corrigé de la question **3.**), et la fonction vectorielle $\alpha_{x,y}$ est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donc $\varphi_{x,y}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. On peut écrire

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi'_{x,y}(t) = \Big(\nabla f\big((1-t)x + ty\big) \;\Big|\; y-x\Big) = \sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}\big((1-t)x + ty\big) \;.$$

Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a, par la règle de la chaîne,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\big((1-t)x+ty\big)\right) &= \left(\nabla\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big)\big((1-t)x+ty\big) \;\Big|\; y-x\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)\, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\big((1-t)x+ty\big) \;. \end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$\varphi''_{x,y}(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (y_i - x_i)\,(y_j - x_j) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\big((1-t)x+ty\big) = (y-x)^\top \cdot H_f\big((1-t)x+ty\big) \cdot (y-x) \;.$$

10. Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$. Comme $\varphi_{x,y}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on peut écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 entre les bornes 0 et 1, soit

$$\varphi_{x,y}(1) = \varphi_{x,y}(0) + (1-0)\cdot\varphi'_{x,y}(0) + \int_0^1 (1-t)\,\varphi''_{x,y}(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

L'hypothèse faite sur la positivité de la matrice hessienne de f en tout point entraîne que $\varphi''_{x,y}(t)$ est toujours positif. Le reste intégral $\displaystyle\int_0^1 (1-t)\,\varphi''_{x,y}(t)\,\mathrm{d}t$ est alors lui aussi positif. On a donc $\varphi_{x,y}(1) - \varphi_{x,y}(0) \geq \varphi'_{x,y}(0)$ soit, en explicitant, $f(y) - f(x) \geq \big(\nabla f(x) \mid y - x\big)$. Ceci étant vrai pour tous points x et y de $\mathbb{R}^n$, d'après la question **7.**, on a prouvé que f est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

11. La fonction f est clairement de classe $\mathcal{C}^2$. On calcule sa matrice hessienne:

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \frac{e^{x_1+x_2}}{(e^{x_1}+e^{x_2})^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Les valeurs propres de cette matrice symétrique sont 0 et $2\,\dfrac{e^{x_1+x_2}}{(e^{x_1}+e^{x_2})^2}$; elles sont positives quel que soit le point $x = (x_1, x_2)$, donc $H_f(x) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, et f est convexe.

12.a. Posons $c_1 = (1-t_1)x + t_1 y$ et $c_2 = (1-t_2)x + t_2 y$. On a alors $c_2 - c_1 = (t_2 - t_1)(y - x)$, puis

$$\begin{aligned} \varphi'_{x,y}(t_2) - \varphi'_{x,y}(t_1) &= \Big(\nabla f\big((1-t_2)x + t_2 y\big) \bigm| y - x\Big) - \Big(\nabla f\big((1-t_1)x + t_1 y\big) \bigm| y - x\Big) \\ &= \big(\nabla f(c_2) \bigm| y - x\big) - \big(\nabla f(c_1) \bigm| y - x\big) \\ &= \big(\nabla f(c_2) - \nabla f(c_1) \bigm| y - x\big) \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1}\,\big(\nabla f(c_2) - \nabla f(c_1) \bigm| c_2 - c_1\big)\ , \end{aligned}$$

et cette expression est positive d'après la question **8.**

b. On a donc montré que la fonction $\varphi'_{x,y}$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Puisqu'elle est dérivable, sa dérivée est positive et, en particulier, $\varphi''_{x,y}(0) \geq 0$. Le calcul fait en **9.** donne alors

$$\varphi''_{x,y}(0) = (y-x)^\top \cdot H_f(x)\cdot(y-x) \geq 0\ ,$$

et ceci quels que soient les points x et y de $\mathbb{R}^n$. On conclut alors comme en **2.b.** que la matrice hessienne $H_f(x)$ est (symétrique) positive.