DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 7
COMMENTAIRES
PSI2 2023-2024

PROBLÈME 1

Un petit problème extrait d'un sujet CCINP, c'est un sujet assez standard, sans difficulté majeure, et qui a été plutôt correctement traité dans un grand nombre de copies.

B.1.a. Question de cours du programme de première année, ne pas oublier de mentionner l'indépendance des variables X_k.

B.1.c. Ici aussi, mentionner l'indépendance des variables S_{k-1} et X_k, qui résulte du lemme des coalitions.

C.1.a. Je pense que le mieux ici est de reconnaître une somme télescopique, sinon une récurrence sur l'entier k (à n fixé donc) marche très bien. Je crois que les tentatives de récurrence sur n comportent toutes une escroquerie quelque part. J'ai vu aussi une tentative de récurrence simultanément sur k et sur n, j'avoue que ça ne m'a pas convaincu!

C.1.b. Ici encore, rappeler l'indépendance des variables S_n et X_{n+1}, utile pour le calcul.

C.1.c. Rappeler ici la propriété de symétrie des coefficients binomiaux $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

PROBLÈME 2

Un sujet un peu académique, et qui n'est pas extrait d'un sujet de concours, juste pour tester un peu l'assimilation du calcul différentiel... eh bien, je ne suis pas déçu!!!

Je vois par exemple que seule une minorité d'entre vous sait exprimer correctement la dérivée première de $\varphi_{x,y} : t \mapsto f\big((1-t)x + ty\big)$ (question **3.**), alors que ce calcul a été rencontré plusieurs fois dans le cours. Un seul a réussi à faire correctement le calcul de la dérivée seconde (question **9.**) (il faut reconnaître que ce n'est pas immédiat et que cela n'a pas été fait en cours).

1. L'énoncé dit bien "une norme quelconque", il ne faut donc pas supposer que la norme N est associée à un produit scalaire!

2.a. Calcul un peu technique, mais pas insurmontable si on sait un peu s'organiser.

2.b. Les démonstrations par enchaînement d'équivalences ne sont pas très probantes car il y a toujours des quantificateurs "cachés" ($\forall t \in [0,1]$, $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$) qu'il n'est pas si facile de prendre en compte. Il vaut mieux procéder par double implication, en n'oubliant pas l'importance de ces quantifications: une matrice symétrique S est positive si on a $x^T S x$ **pour tout** $x \in \mathbb{R}^n$, et ce "pour tout $x \in \mathbb{R}^n$" doit être écrit clairement sur la copie.

3. Question de cours, souvent mal connue ou mal comprise? J'ai vu apparaître ici des $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ qui ne correspondent pas au contexte: en effet, on travaille ici avec n variables et pas avec deux, et les notations x et y représentent ici deux points de $\mathbb{R}^n$ qui ont été préalablement fixés, et non pas des coordonnées scalaires.

Attention aux erreurs de"typage": le gradient $\nabla f(m)$ de f en un point m est un **vecteur** de $\mathbb{R}^n$ (c'est d'ailleurs rappelé dans l'énoncé), et $y - x$ est aussi un vecteur de $\mathbb{R}^n$, il n'est donc pas question de faire le produit "ordinaire" de ces deux objets, c'est-à-dire de noter tout simplement $(y-x)\,\nabla f(m)$. Ces calculs de dérivées font intervenir le **produit scalaire** de ces deux vecteurs, et la notation proposée par l'énoncé est $\big(\nabla f(m) \mid y - x\big)$.

4. Beaucoup de réponses exactes, mais parfois tortueuses.

5. La meilleure explication pour le signe de $\varphi'_{x,y}(0)$ est de dire que $\varphi'_{x,y}(0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{\varphi_{x,y}(t) - \varphi_{x,y}(0)}{t-0}$ et de constater que ces taux d'accroissement sont tous positifs, donc cette inégalité passe à la limite.

Attention à ne pas écrire des inégalités entre vecteurs!

8. On peut ajouter membre à membre des inégalités de même sens, mais certainement pas les soustraire membre à membre!

9. Calcul technique, traité correctement sur une seule copie.

10. L'expression du reste intégral dans la formule de Taylor n'est pas toujours bien connue.