CAHIER de TEXTES MATHÉMATIQUES
PSI2 2023-2024

Lundi 4 septembre 2023, de 9h à 12h

Lecture du poly sur les suites numériques, approfondissement sur les suites définies par une récurrence linéaire d'ordre deux.

Pour mercredi 6 septembre: exos 4, 5, 7 et 9 de la feuille "suites".

Mercredi 6 septembre 2023, de 8h à 10h

Lecture du poly sur les suites numériques: calcul asymptotique. Ensembles dénombrables (début).

TD groupe A (10h-11h30): exos 4 et 7 de la feuille "suites" + principes généraux sur les suites $u_{n+1} = f(u_n)$.

TD groupe B (11h30-13h): exos 4, 7 et 9b. de la feuille "suites" + principes généraux sur les suites $u_{n+1} = f(u_n)$.

Pour jeudi 7 septembre: exos 2, 15, 18 et 22 de la feuille "suites".

Jeudi 7 septembre 2023, de 10h à 12h

Séries numériques: exemples d'introduction, convergence, sommes partielles, somme et restes en cas de convergence.

Propriétés: linéarité de la somme, condition nécessaire de convergence (le terme général tend vers 0), série télescopique associée à une suite, exemple des séries géométriques.

Cas des séries à termes positifs: condition nécessaire et suffisante de convergence (les sommes partielles sont majorées), technique de comparaison série-intégrale.

TD groupe A (13h-14h30): exos 2, 15 et 22 de la feuille "suites".

TD groupe B (14h30-16h): exos 2, 18 et 22 de la feuille "suites".

Pour lundi 11 septembre: exos 4 et 5 de la feuille "séries".

Lundi 11 septembre 2023, de 10h à 13h

Séries à termes positifs: conventions de calcul dans $[0, +\infty]$, séries de référence, théorèmes de comparaison, règle de d'Alembert, règle de Riemann, exemples.

L'ensemble $\mathbb{N}^2$ (et plus généralement $\mathbb{N}^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$) est dénombrable.

Pour mercredi 13 septembre: exos 1, 6, 8 et 12 de la feuille "séries".

Mercredi 13 septembre 2023, de 8h à 10h

Séries à termes quelconques: convergence absolue, elle entraîne la convergence, inégalité triangulaire. Théorème spécial des séries alternées avec signe et majoration du reste. Exemples de séries semi-convergentes.

Le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

TD groupe B (10h-11h30): exos 6, 8 et 12 de la feuille "séries".

TD groupe A (11h30-13h): exos 1, 6 et 8 de la feuille "séries".

Pour jeudi 14 septembre: exos 3, 17 et 22 de la feuille "séries".

Jeudi 14 septembre 2023, de 10h à 12h

Formule de Stirling.

Produit de Cauchy de deux séries numériques. La série exponentielle.

Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ (et, plus généralement, d'un ensemble dénombrable) est dénombrable. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Les ensembles $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $[0,1[$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas dénombrables. Toute réunion au plus dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable. Écriture d'un ensemble dénombrable sous la forme $E = \{x_i \ ; \ i \in I\}$ avec I partie de $\mathbb{N}$ et les x_i deux à deux distincts.

TD groupe B (13h-14h30): exos 3 et 22 de la feuille "séries" + nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

TD groupe A (14h30-16h): idem.

Pour lundi 18 septembre: exos 15b., 20 et 24a.b. de la feuille "séries".

Samedi 16 septembre 2023, de 8h à 12h

DS numéro 1 (4 heures): un exercice (comparaison série-intégrale), un problème (formule de Stirling, calcul de $\zeta(2)$, accélération de convergence).

Lundi 18 septembre 2023, de 10h à 13h

Lecture du début du poly sur l'algèbre linéaire: structure d'espace vectoriel, sous-espaces vectoriels, somme de deux s.e.v., somme directe, supplémentaires, familles libres, génératrices, bases, coordonnées d'un vecteur. Théorie de la dimension, rang d'une famille de vecteurs, formule de Grassmann.

Toute série $\sum a_n$ absolument convergente est "commutativement convergente", définition dans ce cas de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, de $\displaystyle\sum_{n\in A} a_n$ où A est une partie de $\mathbb{N}$, formule de sommation par paquets $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{n\in A_i} a_n\Big)$ où $(A_1,\cdots,A_k)$ est une partition de $\mathbb{N}$. On montre sur l'exemple de la série harmonique alternée (semi-convergente) que l'on peut modifier la somme en permutant l'ordre des termes.

Pour mercredi 20 septembre: exos 1, 4 et 8 de la feuille "algèbre linéaire".

Mercredi 20 septembre 2023, de 8h à 10h

Lecture du poly sur l'algèbre linéaire: Applications linéaires, image, noyau. Endo-, iso- et auto-morphismes. Détermination par les images des vecteurs d'une base ou par les restrictions à deux sous-espaces supplémentaires. Endomorphismes particuliers: homothéties, projecteurs et symétries. Rang d'une application linéaire. Forme géométrique du théorème du rang, théorème du rang.

TD groupe A (10h-11h30): exos 1, 4 et 8 de la feuille "algèbre linéaire".

TD groupe B (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 21 septembre: exos 5, 6, 12 et 16 de la feuille "algèbre linéaire".

Jeudi 21 septembre 2023, de 10h à 12h

Notion d'équation linéaire, principes généraux de résolution.

Produit cartésien d'un nombre fini d'espaces vectoriels, dimension. Sommes et sommes directes d'un nombre fini de sous-espaces de E, dimension.

TD groupe A (13h-14h30): exos 5, 6 et 16b. de la feuille "algèbre linéaire".

TD groupe B (14h30-16h): exos 6, 12 et 16b. de la feuille "algèbre linéaire".

Pour lundi 25 septembre: exos 10, 14 et 18a. de la feuille "algèbre linéaire".

Lundi 25 septembre 2023, de 10h à 13h

En dimension finie, base adaptée à une décomposition de E en somme directe de sous-espaces, base adaptée à un s.e.v. En dimension quelconque, projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe, détermination d'une application linéaire par ses restrictions aux sous-espaces d'une décomposition.

Formes linéaires, hyperplans: formes linéaires coordonnées relativement à une base, définition d'un hyperplan comme noyau d'une forme linéaire non nulle, caractérisation comme sous-espace admettant comme supplémentaire une droite. Hyperplans en dimension finie, équations cartésiennes dans une base. Dimension de l'espace des solutions d'un système linéaire homogène.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, matrices élémentaires $E_{i,j}$, relation $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.
Relations $E_iE_j^\top = E_{i,j}$ et $E_i^\top E_j = \delta_{i,j}$, ainsi que $C_j(A) = AE_j$, $L_i(A) = E_i^\top A$ et $a_{i,j} = E_i^\top AE_j$. Matrices diagonales, triangulaires, symétriques, antisymétriques. Matrices inversibles.

Pour mercredi 27 septembre: exos 21, 26 et 41 de la feuille "algèbre linéaire".

Mercredi 27 septembre 2023, de 8h à 10h

Lecture du poly sur le calcul matriciel: représentation d'une application linéaire par une matrice, application linéaire canoniquement associée à une matrice, matrices de passage et changements de bases.

Matrices définies par blocs, opérations, matrices diagonales ou triangulaires par blocs.

Sous-espace stable par un endomorphisme, notion d'endomorphisme induit.

TD groupe B (10h-11h30): exos 21, 26 et 41 de la feuille "algèbre linéaire".

TD groupe A (11h30-13h): exos 10, 21, 26 et 41 de la feuille "algèbre linéaire".

Pour jeudi 28 septembre: exos 22, 27 et 38 de la feuille "algèbre linéaire".

Jeudi 28 septembre 2023, de 10h à 12h

Lien entre sous-espaces stables et matrices diagonales ou triangulaires par blocs.

Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme en dimension finie.

Polynômes d'endomorphismes ou de matrices, définitions, opérations. Polynômes annulateurs. Utilisation des polynômes annulateurs (calcul de l'inverse ou des puissances d'une matrice).

TD groupe B (13h-14h30): exo 37 de la feuille "algèbre linéaire".

TD groupe A (14h30-16h): exos 37a. et 38 de la feuille "algèbre linéaire".

Pour lundi 2 octobre: exos 33, 35, 47 et 51 de la feuille "algèbre linéaire".

Lundi 2 octobre 2023, de 10h à 13h

Fonctions continues par morceaux sur un segment, définition, propriétés. Construction de l'intégrale d'une telle fonction (d'abord à valeurs réelles, puis à valeurs complexes), propriétés. Fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque.

Théorème fondamental de l'analyse, étude de fonctions de la forme $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$, formule d'intégration par parties, formule du changement de variable.

Pour mercredi 4 octobre: exos 5, 6, 9 et 12 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

Mercredi 4 octobre 2023, de 8h à 10h

Intégrales généralisées sur $[a,+\infty[$, définition. Intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.
Cas des fonctions positives: l'intégrale est convergente si et seulement si les intégrales partielles sont majorées, règle de comparaison avec $0 \leq f \leq g$.

Adaptation à un intervalle de la forme $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$, ou $]a,b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

TD groupe A (10h-11h30): exos 5, 6, 9 et 12 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

TD groupe B (11h30-13h): idem.
Pour jeudi 5 octobre: exos 15, $17(I_1)$, $18(I_1)$ et 24 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

Jeudi 5 octobre 2023, de 10h à 12h

Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$. Cas des intégrales "faussement généralisées", intégrales sur $]a,b[$.

Propriétés des intégrales généralisées: linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Changement de variable et intégration par parties dans des intégrales généralisées.

Distribution d'un poly de rappels de cours sur les fonctions convexes.

TD groupe A (13h-14h30): exos 15 et 17 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

TD groupe B (14h30-16h): exos 18 et 24 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

Pour lundi 9 octobre: 1, 3 et 19 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

Samedi 7 octobre 2023, de 8h à 12h

DS numéro 2 (4 heures): deux problèmes: étude du commutant d'un endomorphisme ou d'une matrice, polynômes de Bernoulli et calcul de $\zeta(2m)$ avec $m \in \mathbb{N}^*$.

Lundi 9 octobre 2023, de 10h à 13h

Intégrales généralisées absolument convergentes, la convergence absolue entraîne la convergence. Un exemple d'intégrale semi-convergente: l'intégrale de Dirichlet. Fonction intégrable sur un intervalle, exemple des fonctions de référence. Invariance par translation ou symétrie. Théorèmes de comparaison, notamment "toute fonction majorée en module par une fonction intégrable est intégrable", pratique des études locales aux bornes.

Pour mercredi 11 octobre: exos 25, 26a. et 27b.c. de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

Mercredi 11 octobre 2023, de 8h à 10h

Théorème de stricte positivité.

Espaces vectoriels $L^1(I, \mathbb{K})$ et $L^1_c(I, \mathbb{K})$, norme $\| \cdot \|_1$ sur ce dernier. Espace vectoriel $L^2_c(I, \mathbb{R})$, produit scalaire et norme associée, inégalité de Cauchy-Schwarz.

Révisions: opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice, interprétation en termes de produit matriciel, conservation du rang. Algorithme de Gauss-Jordan pour inverser une matrice carrée.

TD groupe B (10h-11h30): exo 27 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

TD groupe A (11h30-13h): exos 26a. et 27 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

Pour jeudi 12 octobre: exos 22, 29 et 32 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

Jeudi 12 octobre 2023, de 10h à 12h

Lecture du poly sur les déterminants: déterminant d'une famille de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n rapporté à une base, caractérisation des bases. Déterminant d'un endomorphisme en dimension finie, caractérisation des automorphismes, relation $\det(u \circ v) = \det(u) \cdot \det(v)$. Déterminant d'une matrice carrée, linéarité par rapport à chaque colonne (ou chaque ligne), relation $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$, caractérisation des matrices inversibles.

Calculs de déterminants: effet des opérations élémentaires, cofacteurs, développement par rapport à une ligne ou colonne.

Déterminants de matrices triangulaires par blocs.

TD groupe B (13h-14h30): exos 22 et 29 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

TD groupe A (14h30-16h): exos 29, 31 et 32 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

Pour lundi 16 octobre: 1, 3 et 19 de la feuille "déterminants".

Lundi 16 octobre 2023, de 10h à 13h

Suites de fonctions: convergence simple, convergence uniforme. Exemples. La convergence simple ne conserve pas la continuité des fonctions et n'autorise pas à intervertir limite et intégrale sur un segment. Introduction de la notation $\|f\|_\infty$.

Déterminant de Vandermonde.

Un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ est entièrement déterminé par ses valeurs en $n+1$ points, polynômes d'interpolation de Lagrange.

Pour mercredi 18 octobre: exos 8, 10 et 13 de la feuille "déterminants" + exos 1 et 6 de la feuille "suites et séries de fonctions".

Mercredi 18 octobre 2023, de 8h à 10h

Interpolation de Lagrange (fin): base de Lagrange $\mathcal{L} = (L_0, \cdots, L_n)$, relation $\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$ dans $\mathbb{K}_n[X]$.

Idée de majoration uniforme. Cas de la convergence uniforme sur tout segment.

Régularité de la limite d'une suite de fonctions: théorème de continuité, interversion limite-intégrale sur un segment.

TD groupe A (10h-11h30): exos 1, 5 et 10 de la feuille “déterminants”.

TD groupe B (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 19 octobre: exos 3 et 7 de la feuille “suites et séries de fonctions”.

Jeudi 19 octobre 2023, de 10h à 12h

Contrôle (étude d'intégrabilité ou de nature d'intégrales généralisées) et correction.

Théorème de dérivation de la limite d'une suite de fonctions (interversion limite-dérivée), extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

TD groupe A (13h-14h30): exos 1, 7 et 9 (début) de la feuille “suites et séries de fonctions”.

TD groupe B (14h30-16h): idem.

Pour lundi 6 novembre: exos 2 et 9 de la feuille “suites et séries de fonctions” + DM facultatif Toussaint éventuellement.

VACANCES de TOUSSAINT

Lundi 6 novembre 2023, de 10h à 13h

Séries de fonctions: les modes de convergence (simple, uniforme, normale). La convergence normale entraîne la convergence uniforme. Théorèmes concernant la régularité de la somme d'une série de fonctions: continuité, intégration terme à terme sur un segment, dérivabilité avec extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Pour mercredi 8 novembre: exos 10, 14, 15 et 17 de la feuille "suites et séries de fonctions".

Pour jeudi 16 novembre (ou lundi 20 novembre): DM 3

Mercredi 8 novembre 2023, de 8h à 10h

Séries de fonctions: théorème de la double limite (*admis*).

Notions de vecteur propre et de valeur propre d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Un vecteur non nul est vecteur propre de u si et seulement s'il engendre une droite vectorielle stable par u. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, un scalaire λ est valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$ est non injectif. En dimension finie, notion de spectre. Si E est **de dimension finie**, alors

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff u - \lambda\,\mathrm{id}_E \notin \mathrm{GL}(E) \iff \det(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) = 0\ .$$

TD groupe B (10h-11h30): exos 14, 15 et 17 de la feuille "suites et séries de fonctions".

TD groupe A (11h30-13h): exos 10, 14 et 17 (début) de la feuille "suites et séries de fonctions".

Pour jeudi 9 novembre: exos 10 et 20 (groupe B), ou bien 15 et 17 (groupe A) de la feuille "suites et séries de fonctions" + exos 1 et 2 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Jeudi 9 novembre 2023, de 10h à 12h

Sous-espaces propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

Les sous-espaces propres sont en somme directe. Conséquences: en dimension finie n, $\mathrm{Card}\big(\mathrm{Sp}(u)\big) \leq n$ et $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\big(E_\lambda(u)\big) \leq n$. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

TD groupe B (13h-14h30): exo 10 de la feuille "suites et séries de fonctions" + exos 1 et 2 de la feuille "réduction des endomorphismes".

TD groupe A (14h30-16h): exo 17 (fin) de la feuille "suites et séries de fonctions" + exo 2 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Pour lundi 13 novembre: exos 3 et 8 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Vendredi 10 novembre 2023, de 13h à 17h

DS 3: problème 1 (calcul intégral), puis au choix: un problème 2 sur le wronskien d'une famille de fonctions ou bien deux exercices (calcul intégral et déterminant)

Lundi 13 novembre 2023, de 10h à 13h

Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)\ x$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$. Conséquence: si P est un polynôme annulateur de u, alors les valeurs propres de u sont racines de P. Exemples.

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée d'ordre n, écriture

$$\chi_A = X^n - \operatorname{tr}(A)\, X^{n-1} + \cdots + (-1)^n\ \det(A)\ .$$

Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire, de deux matrices semblables, d'une transposée. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie.

Les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme caractéristique.

Conséquences: en dimension n, il y a au plus n valeurs propres ; un endomophisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, ou d'un $\mathbb{R}$-espace de dimension impaire, a au moins une valeur propre.

Pour mercredi 15 novembre: exos 3, 6, 8, 10 et 12 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Mercredi 15 novembre 2023, de 8h à 10h

Multiplicité d'une valeur propre. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit. Inégalité $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$ pour $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$. Expression de la trace et du déterminant à l'aide des valeurs propres lorsque le polynôme caractéristique est scindé.

Notion de matrice ou d'endomorphisme diagonalisable, diagonalisation effective $A = PDP^{-1}$, interprétation de D et de P.

TD groupe A (10h-11h30): exos 3, 8, 10 et 12 de la feuille "réduction des endomorphismes".

TD groupe B (11h30-13h): exos 3, 8 et 12 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Pour jeudi 16 novembre: exos 13, 14 et 16 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Jeudi 16 novembre 2023, de 10h à 12h

Condition suffisante de diagonalisablité: si un endomorphisme d'un e.v. de dimension n admet n valeurs propres distinctes (ou si son polynôme caractéristique est scindé à racines simples), alors il est diagonalisable.

Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité: la somme (directe) des sous-espaces propres est E, ou bien la somme des dimensions des sous-espaces propres est $n = \dim(E)$, ou bien le polyôme caractéristique est scindé et pour toute valeur propre la dimension du sous-espace propre est égale à la multiplicité.

TD groupe A (13h-14h30): exos 13 et 19 de la feuille "réduction des endomorphismes".

TD groupe B (14h30-16h): idem.

Pour lundi 20 novembre: exos 21 et 33 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Lundi 20 novembre 2023, de 10h à 13h

Théorème de Cayley-Hamilton.

Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, ou bien si et seulement si le polynôme $P = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est annulateur de u. L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est encore diagonalisable.

Pour mercredi 22 novembre: exos 20, 27, 33 et 34 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Pour jeudi 30 novembre: DM 4

Mercredi 22 novembre 2023, de 8h à 10h

Endomorphismes et matrices trigonalisables. Interprétation en termes de sous-espaces stables. Preuve de Cayley-Hamilton dans le cas trigonalisable.

Un endomorphisme (ou une matrice) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

TD groupe B (10h-11h30): exos 20, 34 et 42 de la feuille "réduction des endomorphismes".

TD groupe A (11h30-13h): exos 27, 33 et 34 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Pour jeudi 23 novembre: exos 20, 38 et 44 (groupe A), ou bien 27, 33, 38 et 44 (groupe B) de la feuille "réduction des endomorphismes".

Jeudi 23 novembre 2023, de 10h à 12h

Séries entières: définition, exemples. Règle d'Abel. Définition du rayon de convergence. Étude de la nature de la série entière pour $|z| \neq R$.

TD groupe B (13h-14h30): exos 27 et 33 de la feuille "réduction des endomorphismes" + applications de la réduction.

TD groupe A (14h30-16h): exo 20 de la feuille "réduction des endomorphismes" + applications de la réduction.

Pour lundi 27 novembre: exos 2 et 4 de la feuille "séries entières".

Lundi 27 novembre 2023, de 10h à 13h

Détermination du rayon de convergence: comparaison des coefficients de deux séries entières, utilisations de la règle de d'Alembert.

Opérations sur les séries entières: somme, produit de Cauchy, dérivation formelle (les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence).

Continuité de la fonction somme sur l'intervalle ouvert de convergence $I =]-R, R[$ (la série entière converge normalement sur tout segment inclus dans I), continuité sur le disque ouvert de convergence.

Pour mercredi 29 novembre: exos 1, 3, 5b, 6 et 12 de la feuille "séries entières".

Mercredi 29 novembre 2023, de 8h à 10h

Primitivation terme à terme de la fonction somme d'une série entière dans l'intervalle de convergence. Caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la fonction somme, dérivation terme à terme et relation $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$ si $R > 0$. Exemples.

Notion de fonction développable en série entière sur $]-r, r[$, unicité du développement en série entière.

TD groupe A (10h-11h30): exos 3, 4, 5 et 6 de la feuille "séries entières".

TD groupe B (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 30 novembre: exos 9, 14 et 16 de la feuille "séries entières".

Jeudi 30 novembre 2023, de 10h à 12h

Fonctions développables en série entière (fin), série de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Rappel des différentes formules de Taylor (Young, avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange). Développement en série entière usuels.

TD groupe A (13h-14h30): exos 9 et 11 de la feuille "séries entières".

TD groupe B (14h30-16h): idem.

Pour lundi 4 décembre: exos 20 et 29 de la feuille "séries entières".

Lundi 4 décembre 2023, de 10h à 13h

Notion de norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, exemples. Normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Distance associée à une norme, boules, parties convexes. Toute boule est convexe. Norme associée à un produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité. Exemples.

Pour mercredi 6 décembre: exos 16, 20 et 29 de la feuille “séries entières” + exos 3 et 4 de la feuille “espaces vectoriels normés”.

Mercredi 6 décembre 2023, de 8h à 10h

Suites convergentes dans un espace vectoriel normé, dépendance par rapport à la norme. Unicité de la limite, opérations algébriques. Toute suite convergente est bornée. Suites extraites.

Normes équivalentes. Comparaison des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. On admet que, sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, ce qui autorise à parler de partie bornée ou de limite d'une suite sans préciser quelle est la norme choisie. Dans un espace vectoriel de dimension finie, la convergence d'une suite peut s'étudier coordonnée par coordonnée dans une base.

TD groupe B (10h-11h30): exo 20 de la feuille “séries entières” + exo 4 de la feuille “espaces vectoriels normés”.

TD groupe A (11h30-13h): exos 20 et 29 de la feuille “séries entières” + exo 3 de la feuille “espaces vectoriels normés”.

Pour jeudi 7 décembre: exos 16 (et 29 pour le groupe B) de la feuille “séries entières” + exos 5 et 6 de la feuille “espaces vectoriels normés”.

Jeudi 7 décembre 2023, de 10h à 12h

Points intérieurs à une partie, intérieur de la partie, parties ouvertes dans un e.v.n. Points adhérents, adhérence, parties fermées. Caractérisation séquentielle des points adhérents, des parties fermées. Parties denses.

TD groupe B (13h-14h30): exos 23 et 29 de la feuille “séries entières” + exo 6 de la feuille “espaces vectoriels normés”.

TD groupe A (14h30-16h): exos 16 et 23 de la feuille “séries entières”.

Pour lundi 11 décembre: exos 8, 9 et 11a. de la feuille “espaces vectoriels normés”.

Samedi 9 décembre 2023, de 8h à 12h

DS numéro 4 (4 heures): un exercice (séries entières génératrices de la suite de Fibonacci) et un problème: autour des matrices nilpotentes.

Lundi 11 décembre 2023, de 10h à 13h

Les ouverts sont les complémentaires des fermés, et réciproquement. Intersections et réunions d'ouverts et de fermés.

Notion de limite d'une application d'une partie d'un e.v.n. vers un e.v.n. Unicité de la limite. Caractérisation séquentielle de la limite. Exemples.

Pour mercredi 13 décembre: exos 8, 11a, 12a, 14 et 15 de la feuille "espaces vectoriels normés".

Pour jeudi 21 décembre: DM 5

Mercredi 13 décembre 2023, de 8h à 10h

Cas de la dimension finie: on étudie la limite des fonctions coordonnées relativement à une base. Limite d'une combinaison linéaire, d'une composée. Notion de continuité en un point.

Continuité sur une partie. Opérations algébriques, composition. Cas des fonctions lipschitziennes. Images réciproques d'ouverts et de fermés.

TD groupe A (10h-11h30): exos 10, 11a, 12 et 15 de la feuille "espaces vectoriels normés".

TD groupe B (11h30-13h): exos 8 et 15 de la feuille "espaces vectoriels normés".

Pour jeudi 14 décembre: exos 8 (groupe A), 11a (groupe B), 18, 19 et 20 de la feuille "espaces vectoriels normés".

Jeudi 14 décembre 2023, de 10h à 12h

Espaces vectoriels normés de dimension finie: Théorème des bornes atteintes. Continuité des applications linéaires et multilinéaires. Applications: continuité du produit matriciel, continuité du déterminant, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

TD groupe A (13h-14h30): exos 18 et 20 de la feuille "espaces vectoriels normés".

TD groupe B (14h30-16h): exos 10 et 11a de la feuille "séries entières".

Pour lundi 18 décembre: exos 16 et 17 de la feuille "espaces vectoriels normés".

Lundi 18 décembre 2023, de 10h à 13h

Fonctions vectorielles: interprétation cinématique ou en termes de courbe paramétrée. Dérivation, linéarité de la dérivation. Dérivée de $L \circ f$, de $B(f,g)$, de $M(f_1, \cdots, f_p)$ avec L linéaire, B bilinéaire, M multilinéaire. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre un: position du problème, intervention de la linéarité, expression intégrale des solutions, théorème de Cauchy linéaire.

Pour mercredi 20 décembre: exos 21 et 24 de la feuille “espaces vectoriels normés” + exos 1 et 3 de la feuille “équations différentielles”.

Mercredi 20 décembre 2023, de 8h à 10h

Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre deux: position du problème, intervention de la linéarité, théorème de Cauchy linéaire (*admis*), dimension de l'espace des solutions de l'équation homogène. Méthode de variation de la constante (ou méthode de Lagrange) lorsqu'on connaît une solution de (E_0) ne s'annulant pas sur I. Cas des équations à coefficients constants.

Un exemple de système différentiel linéaire.

TD groupe B (10h-11h30): exo 21 de la feuille “espaces vectoriels normés” + exos 1 et 3 de la feuille “équations différentielles”.

TD groupe A (11h30-13h): exo 24 de la feuille “espaces vectoriels normés” + exos 1 et 3 de la feuille “équations différentielles”.

Pour jeudi 21 décembre: exos 7, 9, 13 et 20 de la feuille “équations différentielles”.

Jeudi 21 décembre 2023, de 10h à 12h

Résolution d'un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants par réduction (diagonalisation ou trigonalisation) de la matrice.

Théorème de convergence dominée.

TD groupe B (13h-14h30): exo 13 de la feuille “équations différentielles”.

TD groupe A (14h30-16h): idem.

Pour lundi 8 janvier 2024: exos 14, 15 et 17 de la feuille “équations différentielles” + exos 3, 5, 8, 10 et 12 de la feuille “probabilités sur un univers fini”.

Pour jeudi 11 janvier 2024: DM 6

VACANCES de NOËL

Lundi 8 janvier 2024, de 10h à 13h

Théorème de convergence dominée, exemples d'applications.

Intégrales dépendant d'un paramètre réel: exemple et position du problème, exemples des intégrales eulériennes, des transformées de Laplace et de Fourier. Théorème de convergence dominée à paramètre continu.

Correction d'exercices de probabilités (programme de 1ère année): exos 3 et 8

Pour mercredi 10 janvier: exos 2, 5 et 26 de la feuille "calcul intégral".

Mercredi 10 janvier 2024, de 8h à 10h

Théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, adaptation avec une condition de domination satisfaite sur tout segment. Théorème de dérivation et adaptation.

TD groupe A (10h-11h30): exo 15 de la feuille "équations différentielles" + exos 2 et 26 de la feuille "calcul intégral".

TD groupe B (11h30-13h): exos 14 et 17 de la feuille "équations différentielles" + exos 2 et 5 de la feuille "calcul intégral".

Pour jeudi 11 janvier: exos 14, 19 et 23 de la feuille "calcul intégral".

Jeudi 11 janvier 2024, de 10h à 12h

Théorème de dérivation des intégrales à paramètre, extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Exemples et exercices.

TD groupe A (13h-14h30): exos 14, 19 et 23 de la feuille "calcul intégral".

TD groupe B (14h30-16h): idem.

Pour lundi 15 janvier: exos 17 et 18 de la feuille "calcul intégral".

Lundi 15 janvier 2024, de 10h à 13h

Théorème d'intégration terme à terme, exemples d'applications. Exemple où l'on applique le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles, exemple où l'on majore à la main l'intégrale du reste.

Espaces préhilbertiens, rappel de l'inégalité de Cauchy-Scwarz et cas d'égalité, cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire, identité du parallélogramme, identité de polarisation. Vecteurs orthogonaux et "théorème de Pythagore". Familles orthogonales. Toute famille orthogonale (finie) de vecteurs non nuls est libre.

Pour mercredi 17 janvier: exos 7, 9 et 12 de la feuille "calcul intégral" + exos 1 et 4 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Mercredi 17 janvier 2024, de 8h à 10h

Familles orthonormales. Sous-espaces orthogonaux, notion de somme directe orthogonale de s.e.v. Notion d'orthogonal d'une partie de E préhilbertien, orthogonal d'un s.e.v., propriétes, exemples (notamment exemple où $F \oplus F^\perp \neq E$ et $(F^\perp)^\perp \neq F$).

Cas de la dimension finie (espaces euclidiens): existence de bases orthonormales, supplémentaire orthogonal d'un s.e.v., théorème de la base orthonormée incomplète.

TD groupe B (10h-11h30): exos 7 et 12 de la feuille "calcul intégral".

TD groupe A (11h30-13h): exos 7 et 9 de la feuille "calcul intégral" + exo 4 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Pour jeudi 18 janvier: exos 3, 9, 14 et 16 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Jeudi 18 janvier 2024, de 10h à 12h

Espaces euclidiens: calculs dans une base orthonormale. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel V de dimension finie dans un espace préhilbertien E: on a $V \oplus V^\perp = E$ et $(V^\perp)^\perp = V$. Expression du projeté orthogonal $p_V(x)$ dans une base orthonormale de V, ou bien recherche des coordonnées de $p_V(x)$ dans une base quelconque de V par résolution d'un système linéaire. Inégalité de Bessel et cas d'égalité. Distance d'un vecteur à un s.e.v. de dimension finie.

TD groupe B (13h-14h30): exos 4 et 9 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

TD groupe A (14h30-16h): exos 3, 14 et 16 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Pour lundi 22 janvier: exos 8, 13 et 17 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Samedi 20 janvier 2024, de 8h à 12h

DS numéro 5 (4 heures): un exercice (séries entières et équations différentielles) et un problème: méthode de Laplace et temps d'attente de la première répétition.

Lundi 22 janvier 2024, de 10h à 13h

Application du cours: régression linéaire (droite des moindres carrés). Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, existence (*démontrée*) et unicité (*non encore démontrée*) de l'orthonormalisée d'une famille libre finie dans un espace préhilbertien. Formes linéaires sur un espace euclidien ("théorème de représentation de Riesz"). Hyperplans, vecteur normal et équation cartésienne dans une BON, distance d'un vecteur à un hyperplan, expression de l'image d'un vecteur par la réflexion d'hyperplan H.

Pour mercredi 24 janvier: exos 7, 8, 11 et 17 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Pour jeudi 1er février: DM 7

Mercredi 24 janvier 2024, de 8h à 10h

Isométries vectorielles (ou automorphismes orthogonaux) d'un espace euclidien: définition par conservation de la norme, caractérisations par conservation du produit scalaire, ou conservation des bases orthonormales, orthogonal d'un s.e.v. stable, propriété $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$. Définition du groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$. Exemple des symétries orthogonales.

Matrices orthogonales: définition par $A^\top A = I_n$, caractérisation par les vecteurs-colonnes ou les vecteurs-lignes. Groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{O}(n)$. Exemples.

TD groupe A (10h-11h30): exos 7, 11 et 17 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

TD groupe B (11h30-13h): exos 8, 11, 16 et 17 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Pour jeudi 25 janvier: exos 18, 21 et 22 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Jeudi 25 janvier 2024, de 10h à 12h

Matrices orthogonales directes et indirectes, groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SO}(n)$. Utilisation des matrices orthogonales comme matrices de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale, ou pour représenter une isométrie vectorielle d'un espace euclidien dans une base orthonormale.

Endomorphismes autoadjoints (ou symétriques) d'un espace euclidien, propriétés élémentaires.

TD groupe A (13h-14h30): exos 18, 21 et 22 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

TD groupe B (14h30-16h): idem.

Pour lundi 29 janvier: exos 12 et 23 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Lundi 29 janvier 2024, de 10h à 13h

Représentation des endomorpismes autoadjoints par les matrices symétriques réelles en base orthonormale.

Théorème spectral: versions fonctionnelle et matricielle, preuve (*non exigible*). Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs et leur caractérisation spectrale. Matrices symétriques positives et définies positives et leur caractérisation spectrale.

Pour mercredi 31 janvier: exos 24, 26, 29 et 30 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Mercredi 31 janvier 2024, de 8h à 10h

Rappels sur les ensembles dénombrables.

Somme d'une famille dénombrable de réels positifs dans $[0, +\infty]$, sommation par paquets, interversion de sommations, notion de famille sommable.

Familles sommables de nombres réels ou complexes. Sommation par paquets, théorème de Fubini, produit de deux sommes, propriétés de croissance, linéarité, inégalité triangulaire.

TD groupe B (10h-11h30): exos 24, 26 et 29 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

TD groupe A (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 1er février: exos 32b, 35, 36 et 39 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Jeudi 1er février 2024, de 10h à 12h

Tribu sur un ensemble, propriétes, espace probabilisable, événements, vocabulaire ensembliste et probabiliste. Notion de probabilité, σ-additivité, propriétés élémentaires. Théorème de continuité croissante.

TD groupe B (13h-14h30): exos 32b, 35, 36a et 39 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

TD groupe A (14h30-16h): idem.

Pour lundi 5 février: exos 28, 30 et 40 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Lundi 5 février 2024, de 10h à 13h

Théorème de continuité décroissante, propriété de sous-additivité, conséquences (une réunion au plus dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable). Probabilités conditionnelles, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes. Événements indépendants. Distribution de probabilités sur un ensemble au plus dénombrable: si Ω est au plus dénombrable, une probabilité P sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\big)$ est déterminée par les $P\big(\{\omega\}\big)$, avec $\omega \in \Omega$.

Pour mercredi 7 février: exos 2, 4 et 5 de la feuille "probabilités".

Mercredi 7 février 2024, de 8h à 10h

Notion de variable aléatoire discrète (v.a.d.) sur $(\Omega, \mathcal{A})$, fonction d'une variable aléatoire. Loi d'une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Exemple de la loi géométrique. Variables indépendantes.

TD groupe A (10h-11h30): exos 4 et 5 de la feuille "probabilités".

TD groupe B (11h30-13h): exos 2 et 4 de la feuille "probabilités".

Pour jeudi 8 février: exos 6, 8 et 9 de la feuille "probabilités".

Pour jeudi 29 février: DM 8

Jeudi 8 février 2024, de 10h à 12h

Si $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, alors $f_1(X_1), \cdots, f_n(X_n)$ sont indépendantes. Théorème des coalitions. Suites de variables i.i.d. Loi de Poisson, interprétation comme "loi des événements rares". Couples de variables aléatoires. Loi conditionnelle de X sachant un événement A.

TD groupe A (13h-14h30): exos 6, 8, 9 et 12 de la feuille "probabilités".

TD groupe B (14h30-16h): exos 6, 9 et 12 de la feuille "probabilités".

Pour lundi 26 février: exos 11, 13, 18 (et 20) de la feuille "probabilités".

Samedi 10 février 2024, de 8h à 11h

DS numéro 6 (3 heures): deux exercices (un sur une transformée de Laplace, un sur les matrices symétriques positives) et un problème sur les matrices orthogonales

---

VACANCES d'HIVER

Lundi 26 février 2024, de 10h à 13h

Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty]$, exemple de la loi de Poisson.

Formule de calcul $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$ lorsque $X(\Omega) \subset \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, cas de la loi géométrique.

Variables d'espérance finie à valeurs réelles ou complexes, définition de l'espérance.

Propriétés: formule de transfert, inégalité triangulaire, linéarité de l'espérance, espace vectoriel $L^1(\Omega)$, positivité et croissance pour les v.a. réelles, théorème de comparaison (si $|X| \leq Y$ et $Y \in L^1(\Omega)$, alors $X \in L^1(\Omega)$).

Pour mercredi 28 février: exos 10, 11, 13, 18 et 20 de la feuille "probabilités".

Mercredi 28 février 2024, de 8h à 10h

Si $X_1, \cdots, X_n$ sont d'espérance finie et indépendantes, alors $\mathrm{E}\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_k)$.

Si X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie. Espace vectoriel $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ et forme bilinéaire symétrique positive $(X, Y) \mapsto \mathrm{E}(XY)$, inégalité de Cauchy-Schwrz et cas d'égalité. Définition de la variance, formule de Koenig-Huygens, $V(aX + b)$, écart-type. Variance pour les lois usuelles. Variables centrées, réduites.

TD groupe B (10h-11h30): exos 10, 11 (partiellement) et 20 de la feuille "probabilités".

TD groupe A (11h30-13h): exos 10 et 11 de la feuille "probabilités".

Pour jeudi 29 février: exos 13, 16 et 17 (sauf **b.**) de la feuille "probabilités".

Jeudi 29 février 2024, de 10h à 12h

Covariance (c'est une forme bilinéaire symétrique positive sur $L^2(\Omega, \mathbb{R})$), formule de Koenig-Huygens généralisée, variables décorrélées, variance d'une somme.

Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, propriétés, cas des lois usuelles. Fonction génératrice d'une somme de n variables indépendantes.

TD groupe B (13h-14h30): exos 16 et 17 de la feuille "probabilités".

TD groupe A (14h30-16h): exos 13 et 17 de la feuille "probabilités".

Pour lundi 4 mars: exos 23 et 26 de la feuille "probabilités".

Lundi 4 mars 2024, de 10h à 13h

Calcul de l'espérance et de la variance à l'aide de la fonction génératrice.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres.

Calcul différentiel: dérivée selon un vecteur notée $\mathrm{D}_h f(a)$, dérivées partielles, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, notion de développement limité d'ordre un.

Pour mercredi 6 mars: exos 23, 25, 26 et 27 de la feuille "probabilités".

Mercredi 6 mars 2024, de 8h à 10h

Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ admet, en tout point de U, un développement limité d'ordre un. Différentielle de f en un point a de U, notation $\mathrm{d}f(a)\cdot h$. Égalité $\mathrm{d}f(a)\cdot h = \mathrm{D}_h f(a)$.

Règle de la chaîne pour le calcul de la dérivée de $t \mapsto f\big(x_1(t), \cdots, x_p(t)\big)$, i.e. "dérivée le long d'un arc" ou, plus généralement, pour calculer les dérivées partielles d'une application composée

$$(u_1, \cdots, u_n) \mapsto f\big(x_1(u_1, \cdots, u_n), \cdots, x_p(u_1, \cdots, u_n)\big) \ .$$

Exemple du passage en coordonnées polaires.

TD groupe A (10h-11h30): exos 23 et 27 de la feuille "probabilités".

TD groupe B (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 7 mars: exos 1, 2, 6 et 8a. de la feuille "calcul différentiel".

Jeudi 7 mars 2024, de 10h à 12h

Caractérisation des fonctions (de classe $\mathcal{C}^1$) constantes sur un ouvert convexe. Gradient, expression en coordonnées polaires, $\mathrm{d}f(a)\cdot h = \big(\nabla f(a) | h\big)$.

Dérivées partielles d'ordre deux, fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, théorème de Schwarz. Exemples d'équations aux dérivées partielles d'ordre un ou deux.

TD groupe A (13h-14h30): exos 1 et 8a. de la feuille "calcul différentiel".

TD groupe B (14h30-16h): idem.

Pour mercredi 13 mars: exos 8b., 9, 10 et 13 de la feuille "calcul différentiel".

Lundi 11 mars 2024

Cours annulé (professeur en grève)

Mercredi 13 mars 2024, de 8h à 10h

Matrice hessienne en un point a d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, développement limité d'ordre deux d'une telle fonction.

Notion d'extremum global, d'extremum local. Condition (nécessaire) du premier ordre sur un ouvert, point critique. Recherche d'extremums pour une fonction continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^p$. Conditions d'ordre deux faisant intervenir la matrice hessienne.

TD groupe B (10h-11h30): exos 9, 13 et 17 de la feuille "calcul différentiel".

TD groupe A (11h30-13h): exos 10, 13 et 17 de la feuille "calcul différentiel".

Pour jeudi 14 mars: exos 18, 20 et 21 de la feuille "calcul différentiel".

Jeudi 14 mars 2024, de 10h à 12h

Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, automorphismes directs et indirects.

Produit mixte de n vecteurs dans un espace euclidien orienté de dimension n, propriétés.

Produit vectoriel dans un espace euclidien orienté de dimension trois, propriétés, formule du double produit vectoriel, identité de Lagrange, application à la construction de bases orthonormales directes.

TD groupe B (13h-14h30): exos 18, 20 et 21 de la feuille "calcul différentiel".

TD groupe A (14h30-16h): exos 18 et 21 de la feuille "calcul différentiel".

Pour lundi 18 mars: exo 46 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Lundi 18 mars 2024, de 10h à 13h

Orientation corrélative d'un plan et d'une droite dans E_3 orienté.

Explicitation des groupes $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Définition de la rotation d'angle θ dans un plan euclidien orienté, notion d'angle orienté de deux vecteurs non nuls, expression de $(x|y)$ et de $[x, y]$ à l'aide de $\|x\|$, $\|y\|$ et $\theta = (x, y)$. Isométries indirectes du plan: ce sont les réflexions.

Notion d'angle géométrique (ou écart angulaire) entre deux vecteurs non nuls, mesuré dans $[0, \pi]$, expression de $(x|y)$ et de $\|x \wedge y\|$, construction du vecteur $x \wedge y$.

Pour mercredi 20 mars: exos 44 et 45 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Mercredi 20 mars 2024, de 8h à 10h

Rotations dans un espace euclidien orienté de dimension trois, matrice dans une base orthonormale directe adaptée, construction et expression de l'image d'un vecteur. Isométries indirectes en dimension trois (réflexions et antirotations).

TD groupe A (10h-11h30): exos 23, 44 et 45 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

TD groupe B (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 21 mars: exos 42(A) et 43 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Jeudi 21 mars 2024, de 10h à 12h

Courbes $f(x, y) = 0$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, tangente en un point régulier. En un point régulier de f, le vecteur gradient est orthogonal à la ligne de niveau de f passant par ce point, et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

Surfaces $f(x, y, z) = 0$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$, courbes tracées sur cette surface. Définition du plan tangent à la surface en un point régulier, il est orthogonal au vecteur gradient et il contient les droites tangentes aux courbes tracées sur la surface.

TD groupe A (13h-14h30): exos 42A et 43 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens" + exo 23 de la feuille "calcul différentiel".

TD groupe B (14h30-16h): exo 43 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens" + exos 23 et 27 de la feuille "calcul différentiel".

Samedi 23 mars 2024, de 8h à 12h

DS numéro 7 (4 heures): un problème de proba + un problème sur les fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$.

Lundi 25 mars 2024, de 11h à 13h

Recherche sur le sujet Math 2 PC de Mines-Ponts 2019 (étude de la dérivabilité en 0 et en π de la somme d'une série de fonctions).

Mercredi 27 mars 2024, de 8h à 10h

Recherche sur le sujet Math 2 PC de Mines-Ponts 2019 (étude de la dérivabilité en 0 et en π de la somme d'une série de fonctions) (suite) + "étude d'une famille de séries entières" extrait de CCINP 2021 PSI.

TD groupe 1 (10h-11h30): idem.

TD groupe 2 (11h30-13h): idem.

Jeudi 28 mars 2024, de 10h à 12h

Révisions du cours sous forme de Vrai-Faux

TD groupe 1 (13h-15h): Recherche sur un sujet de Centrale (matrices de Toeplitz) ou de CCINP (décomposition QR)

TD groupe 2 (15h-17h): idem.

Mercredi 3 avril 2024, de 8h à 11h

Recherche sur un sujet de Centrale (Math-2 PSI 2022) ou de CCINP (décomposition QR, sujet PSI 2022).