Corrigé de la deuxième épreuve de mathématique
Centrale PSI 2022

daouia_abdelkader@hotmail.fr

I Préliminaires : étude de quelques éléments de E

$I.A$ - Des fonctions de E utiles pour la suite

$Q.1$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$, $p_\alpha(t) = t^\alpha$ $t \in [0, +\infty[$. La fonction $t \longmapsto (p_\alpha(t))^2 \dfrac{e^{-t}}{t} = t^{2\alpha-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et positive .

(a) Au voisinage de 0 , $t^{2\alpha-1}e^{-t} \sim_0 t^{2\alpha-1} = \dfrac{1}{t^{1-2\alpha}} \geq 0.$

$t \longmapsto \dfrac{1}{t^{1-2\alpha}}$ est intégrable sur $]0, 1$, c'est une intégrale de Riemann $1 - 2\alpha < 1$, donc la fonction est intégrable sur $]0, 1]$.

(b) Au voisinage de $+\infty$, $t^{2\alpha-1}e^{-t} = o(\frac{1}{t^2})$, elle est donc intégrable sur $[1, +\infty[$

$$\int_0^{+\infty} (p_\alpha(t))^2 \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_0^{+\infty} t^{2\alpha-1}e^{-t}dt = \Gamma(2\alpha)$$

$Q.2$

P une fonction polynomiale ,elle est continue .

(a) Si $P(0) \neq 0$, on a l'équivalence : $P^2(t)\dfrac{e^{-t}}{t} \sim_0 \dfrac{P^2(0)}{t}$, cette fonction garde un signe constant . $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$, on peut donc en utilisant le critère de comparaison des fonctions positives dire que $t \longmapsto P^2(t)\dfrac{e^{-t}}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$

(b) Si $P(0) = 0$, la fonction $t \longmapsto P^2(t)\dfrac{e^{-t}}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 (donc intégrable sur $]0, 1]$) , et négligeable devant $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$, ce qui achève la justification de l'intégrabilité.

$Q.3$

Si $a = b = 0$, la fonction est nulle , $0 \in E$.
Réciproquement , supposons que $a \neq 0$, au voisinage de $+\infty$, on a

$$(a\ e^t + b)^2 \frac{e^{-t}}{t} \sim a^2 \frac{e^t}{t} \longrightarrow_{t \to +\infty} +\infty$$

La fonction n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. La première condition d'intégrabilité est que $a = 0$. Supposons que $a = 0$, la fonction est une fonction polynomiale constante , elle est dans E ssi $b = 0$.

$Q.4$

$t \longmapsto (e^t - 1)^2 \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, x]$, le développement limité au voisinage de 0 donne :

$$\lim_{t \longrightarrow 0} (e^t - 1)^2 \frac{e^{-t}}{t} = 0$$

Elle est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur $]0, x]$.

$Q.5$

$k_x(t) = e^t - 1 \;\;,\;\; t \in]0,x] \;\;,\;\; k_x(t) = e^x - 1 = cte \;\;,\;\; t \in [x,+\infty[$. La fonction est continue .

D'après la question précédente $t \longmapsto k_x^2(t)\dfrac{e^{-t}}{t}$ est intégrable sur $]0,x]$.

Sur $[x,+\infty[$,$t \longmapsto k_x^2(t)\dfrac{e^{-t}}{t}$ est négligeable devant $t \longrightarrow \dfrac{1}{t^2}$.

$I.B$ – Une condition suffisante d'appartenance à E

Dans cette sous partie , on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ à valeurs réelles et vérifie :

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = 0 \quad , \qquad \exists C>0\,;\forall x>0\;,\; |f'(x)| \le C\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}$$

$Q.6$

La fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}$ est continue ,intégrable sur $]0,x]$, pour tout $x>0$ (équivalente au voisinage de 0 à $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, la fonction Φ est bien définie .

On peut écrire :

$$\Phi(x) = \frac{4\sqrt{x}e^{\frac{x}{2}}}{x+1} - \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}dt}_{cte} - \int_1^x \frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}dt \quad x>0$$

Φ est de classe $\mathbb{C}^1$ sur $]0,+\infty[$

$$\Phi'(x) = \frac{(1-x)^2 e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}(x+1)^2} \ge 0 \qquad x>0$$

$$0 \le \int_0^x \frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}dt \le e^{\frac{x}{2}} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}}dt = 2e^{\frac{x}{2}}\sqrt{x} \quad x>0$$

On peut en déduire facilement :

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \Phi(x) = 0$$

Comme la fonction est croissante , elle est toujours positive sur $]0,+\infty[$ $\left(\int_0^x \dfrac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}dt \le \dfrac{4\sqrt{x}e^{\frac{x}{2}}}{x+1}\right)$.

$Q.7$

Pour $x>0$, f admet 0 comme limite en 0 :

$$|f(x)| = |\int_0^x f'(t)dt| \le \int_0^x |f'(t)|dt \le C\int_0^x \frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}dt \le \frac{4C\sqrt{x}e^{\frac{x}{2}}}{x+1}$$

$Q.8$

f est continue , et on a l'encadrement :

$$0 \le f^2(t)\frac{e^{-t}}{t} \le \frac{16\;C^2}{(1+t)^2} \qquad t>0$$

La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t)^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, il en découle immédiatement l'intégrabilité de $t \longmapsto f^2(t)\dfrac{e^{-t}}{t}$, d'où $f \in E$.

$Q.9$

f, g sont dans E , la fonction $t \longmapsto f(t)g(t)\dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue .En utilisant la relation

$$2|ab| \leq a^2 + b^2 \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

On peut écrire :

$$\Big|f(t)g(t)\frac{e^{-t}}{t}\Big| = \underbrace{\Big|f(t)\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}\Big|}_{a}\underbrace{\Big|g(t)\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}\Big|}_{b} \leq \frac{1}{2}\Big(\underbrace{f^2(t)\frac{e^{-t}}{t}}_{intégrable\ ,\ f\in E} + \underbrace{g^2(t)\frac{e^{-t}}{t}}_{intégrable\ ,\ g\in E} \Big)$$

$Q.10$

E est non vide , contenu dans l'ensemble des fonction continues sur $]0, +\infty[$ qui est un espace vectoriel.
Si on prend $(f, g) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda f(t) + g(t))^2\frac{e^{-t}}{t} = \lambda^2 f^2(t)\frac{e^{-t}}{t} + g^2(t)\frac{e^{-t}}{t} + 2\lambda f(t)g(t)\frac{e^{-t}}{t}$$

Les trois fonctions sont intégrables , il en découle $(\lambda f + g) \in E$.
E est donc un sous espace vectoriel.

$Q.11$

L'intégrale qui définit ce produit scalaire est bien définie .(l'intégrale converge).
La symétrie et la bilinéarité sont évidentes .
$\langle f, f\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\frac{e^{-t}}{t}dt \geq 0$. Si l'intégrale est nulle , comme la fonction qu'on intègre est positive continue , on doit avoir :

$$f^2(t)\frac{e^{-t}}{t} = 0 \Longrightarrow f(t) = 0 \qquad \forall\ t \in]0, +\infty[$$

C'est donc un produit scalaire.

$Q.12$

On peut raisonner de deux manières :

(a) <u>En utilisant le théorème de la convergence dominée TCD</u> :
Soit $(x_n)_n$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0. On note :

$$h_n(t) = k^2_{x_n}(t)\frac{e^{-t}}{t} \ ,\ t \in]0, +\infty[$$

Soit $t \in]0, +\infty[$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$: $x_n \leq t \quad \forall\ n \geq n_0$ (la définition de la limite avec $\varepsilon = t$).

$$\forall\ n \geq n_0\ ,\ h_n(t) = (e^{x_n} - 1)^2\frac{e^{-t}}{t} \longrightarrow_{n\longrightarrow+\infty} 0$$

La suite $(h_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle.
La suite $(x_n)_n$ est bornée , il existe $m > 0$ tel que $0 < x_n \leq m$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
La fonction $t \longmapsto \dfrac{(e^t - 1)^2}{t}$, est continue sur $]0, m]$,prolongeable par continuité en 0 , elle est donc bornée :

$$\exists M > 0 \quad : \quad 0 \leq \frac{(e^t - 1)^2}{t} \leq M \ \Rightarrow 0 \leq h_n(t) \leq M\ e^{-t} \quad \forall\ t \in]0, x_n]$$

Pour $t \in [x_n, +\infty[\quad , \quad 0 \leq h_n(t) = (e^{x_n}-1)^2\dfrac{e^{-t}}{t} \leq (e^{x_n}-1)^2\dfrac{(e^{x_n}-1)^2}{x_n}e^{-t} \leq M\ e^{-t}$

On a donc la domination :

$$0 \leq h_n(t) \leq M\ e^{-t} \ = \varphi(t) \qquad \forall t \in]0, +\infty[\quad \forall n \in \mathbb{N}$$

φ est intégrable , le théorème de la convergence dominée permet d'intervertir :

$$\|k_{x_n}\|^2 = \int_0^{+\infty} k_{x_n}^2(t)\frac{e^{-t}}{t}dt = \int_0^{+\infty} h_n(t)dt \longrightarrow \int_0^{+\infty} \lim_{n\longrightarrow+\infty} h_n(t)dt = 0$$

(b) <u>En utilisant un encadrement</u> :

En gardant les mêmes notations :

$$0 \leq \|k_{x_n}\|^2 = \int_0^{+\infty} k_{x_n}^2(t)\frac{e^{-t}}{t}dt = \int_0^{x_n} k_{x_n}^2(t)\frac{e^{-t}}{t}dt + \int_{x_n}^{+\infty} k_{x_n}^2(t)\frac{e^{-t}}{t}dt$$

$$\leq M\int_0^{x_n} e^{-t}dt + (e^{x_n}-1)^2\int_{x_n}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$$

$$\leq M\int_0^{x_n} dt + \frac{(e^{x_n}-1)^2}{x_n}\int_{x_n}^{+\infty} e^{-t}dt$$

$$= M\ x_n + \frac{(e^{x_n}-1)^2}{x_n}e^{-x_n}$$

Ce dernier membre tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

$Q.13$

On pose $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = \langle p_{k+1}, 1\rangle \quad , \quad p_\alpha(t) = t^\alpha \qquad k \in \mathbb{N}^*.$

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \lim_{A\to+\infty}\Big[-e^{-t}\Big]_0^A = 1$$

On fait une intégration par parties :

$$u(t) = t^k \quad , \quad u'(t) = kt^{k-1} \quad , \quad v'(t) = e^{-t} \quad , \quad v(t) = -e^{-t}$$

On trouve :

$$I_k = k\ I_{k-1} = \ldots = k!\ I_0 = k!$$

$Q.14$

$$\langle p_n, p_m\rangle = I_{n+m} = (n+m)! \neq 0$$

La famille n'est pas orthogonale.

<u>III Un opérateur sur E</u>

$Q.15$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz , on peut écrire :

$$0 \leq |U(f)(x)| \leq |\langle k_x, f\rangle| \leq \|k_x\|\ \|f\|$$

Et on utilise la question $Q.12$ pour conclure.

$Q.16$

$k_x(t) = e^t - 1 \quad , \quad t \in]0, x] \quad , \quad k_x(t) = e^x - 1 = cte \quad , \quad t \in [x, +\infty[.$

$$U(f)(x) = \int_0^x k_x(t)f(t)\frac{e^{-t}}{t}dt + \int_x^{+\infty} k_x(t)f(t)\frac{e^{-t}}{t}dt$$

On remplace dans chaque intégrale $k_x(t)$ par sa valeur.

$Q.17$

On change un peu l'écriture :

$$\begin{aligned} U(f)(x) &= \int_0^x f(t)\frac{1-e^{-t}}{t}dt + (e^x - 1)\Big(-\int_1^x f(t)\frac{e^{-t}}{t}dt + \int_1^{+\infty} f(t)\frac{e^{-t}}{t}dt\Big) \\ &= \int_0^x f(t)\frac{1-e^{-t}}{t}dt + (e^x - 1)\Big(cte - \int_1^x f(t)\frac{e^{-t}}{t}dt\Big) \end{aligned}$$

Les fonctions $t \longmapsto f(t)\dfrac{1-e^{-t}}{t}$ et $t \longmapsto f(t)\dfrac{e^{-t}}{t}$ sont continues sur $]0, +\infty[$, $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et on a :

$$\begin{aligned} (U(f))'(x) &= \frac{1-e^{-x}}{x}f(x) + e^x\Big(cte - \int_1^x f(t)\frac{e^{-t}}{t}dt\Big) - (e^x - 1)f(x)\frac{e^{-x}}{x} \\ &= e^x\Big(cte - \int_1^x f(t)\frac{e^{-t}}{t}dt\Big) \\ &= e^x\int_x^{+\infty} f(t)\frac{e^{-t}}{t}dt \end{aligned}$$

$Q.18$

$U(f)'$ est le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$:

$$U(f)''(x) = e^x\int_x^{+\infty} f(t)\frac{e^{-t}}{t} - e^x f(x)\frac{e^{-x}}{x} = U(f)'(x) - \frac{f(x)}{x}$$

$U(f)$ est solution de l'équation différentielle :

$$y''(x) - y'(x) = -\frac{f(x)}{x}$$

$Q.19$

$$\begin{aligned} |U(f)'(x)| = \Big|e^x\int_x^{+\infty} f(t)\frac{e^{-t}}{t}\Big| &\leq e^x\int_x^{+\infty} |f(t)\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}|\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}dt \\ &\leq e^x\Big(\int_x^{+\infty} f^2(t)\frac{e^{-t}}{t}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq e^x\Big(\int_0^{+\infty} f^2(t)\frac{e^{-t}}{t}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x}\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{e^x}{\sqrt{x}}\|f\|\Big(\underbrace{\int_x^{+\infty} e^{-t}}_{=e^{-x}}\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\|f\| \end{aligned}$$

$Q.20$

On utilise les questions $Q.7$, $Q.15$, avec $C = \|f\|$.
La linéarité de U est évidente.

$Q.21$

Partant de la majoration précédente :

$$\|U(f)\|^2 = \int_0^{+\infty} (U(f)(t))^2 \frac{e^{-t}}{t} dt \leq 16\|f\|^2 \int_0^{+\infty} \frac{t\ e^t}{(1+t)^2} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

$$= 16\|f\|^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2} dt$$

$$= 16\|f\|^2$$

$Q.22$

Soit $f \in Ker(U)$

$$U(f) = 0 \implies U(f)^{'} = 0 \quad , \quad U(f)^{"} = 0$$

On remplace dans l'équation différentielle de la question $Q.18$, on conclut immédiatement que $f(x) = 0$, $\forall x \in]0, +\infty[$.

$Q.23$

Supposons que U est surjectif , on prend $\alpha = \dfrac{1}{4} > 0$, $p_\alpha \in E$ admet un antécédent

$$\exists f \in E \quad : \quad x^{\frac{1}{4}} = p_\alpha(x) = U(f)(x) \leq 4\|f\| \frac{\sqrt{x} e^{\frac{x}{2}}}{1+x} \qquad \forall\ x \in]0, +\infty[$$

On simplifie par $x^{\frac{1}{4}}$, et on fait tendre x vers 0 , on trouve $1 \leq 0$, ce qui est absurde .
U n'est pas surjectif .

$Q.24$

On dérive F et on utilise l'équation différentielle de la question $Q.18$ vérifiée par $U(f)$.

$Q.25$

En utilisant la question $Q.19$, on trouve :

$$|F(x)| \leq \|f\| \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} \qquad \forall\ x \in]0, +\infty[$$

On utilise la question $Q.20$, :

$$|F(x)\ U(g)(x)| \leq \|f\| \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} 4\|g\| \frac{\sqrt{x} e^{\frac{x}{2}}}{1+x} = \frac{4\|f\|\ \|g\|}{1+x} \qquad \forall\ x \in]0, +\infty[$$

$Q.26$

La première majoration dans la question $Q.19$, est :

$$|F(x)| \leq \Big(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \Big)^{\frac{1}{2}}$$

Pour $x \in]0, 1[$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_x^1 \frac{1}{t} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} dt = -\ln(x) + e^{-1}$$

$Q.27$

La majoration dans la question $Q.24$, donne directement

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)\ U(g)(x) = 0$$

Sur $]0,1[$,

$$|F(x)\ U(g)(x)| \leq 4\ \|f\|\|g\|\Big(xe^{-1} - x\ln(x)\Big)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x+1} \longrightarrow_{x\to 0} 0$$

$Q.28$

$$\langle f, U(g)\rangle = \int_0^{+\infty} U(g)(t)\Big(f(t)\frac{e^{-t}}{t}\Big)dt = \int_0^{+\infty} U(g)(t)F^{'}(t)dt$$

On effectue une intégration par parties en utilisant la question précédente , on trouve :

$$\langle f, U(g)\rangle = -\int_0^{+\infty} U(g)^{'}(t)F(t)dt = \int_0^{+\infty} U(g)^{'}(t)U(f)^{'}(t)e^{-t}dt$$

$Q.29$

Par symétrie du produit scalaire :

$$\langle U(f), g\rangle = \langle g, U(f)\rangle = \int_0^{+\infty} U(g)^{'}(t)U(f)^{'}(t)e^{-t}dt = \langle f, U(g)\rangle$$

IV Solutions d'une équation différentielle développables en série entière

$Q.30$

f une solution développable en série entière sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_p) .
On peut dériver terme à terme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad , \quad f^{'}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad , \quad f^{"}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

On injecte dans l'équation :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} p a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} p a_n x^n = 0$$

En effectuant un changement d'indice dans le premier terme , on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} p a_n x^n = 0$$

Finalement , on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(n(n+1)a_{n+1} - (n-p)a_n\Big)x^n = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Tous les coefficients sont nuls , et en prenant $x = 0$ dans l'équation (E_p) , on trouve :

$$a_0 = f(0) = 0 \quad , \quad n(n+1)a_{n+1} - (n-p)a_n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$Q.31$

(E_p) admet une solution polynomiale h non nulle si et seulement si h est une solution développable en série entière et il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$a_{n+1} = 0 \quad , \quad a_n \neq 0$$

Si pour un entier k , $a_k = 0$ on a $a_m = 0 \quad \forall m \geq k.$
En utilisant la relation $n(n+1)a_{n+1} = (n-p)a_n$, on trouve $p = n \in \mathbb{N}^*$
Réciproquement , si $p \in \mathbb{N}^*$, on peut construire une solution polynomiale de (E_p) en utilisant la relation de récurrence de la question $Q.30$.
Soit $P(x) = \sum_{k=1}^{r} a_k x^k$, une solution polynomiale de (E_p) , de degré r $(a_r \neq 0)$, on remplace dans l'équation et on identifiant le coefficient de x^r , on trouve :

$$0 = (-r+p)a_r \Longrightarrow r = p$$

$Q.32$

P est solution de (E_p) , $(x(P" - P') + p\ P = 0)$.
$h(x) = e^{-x}\ P$, $h'(x) = -e^{-x}\ P + e^{-x}\ P'$, $h"(x) = e^{-x}\ P - 2e^{-x}\ P' + e^{-x}\ P"$

$$x(h" + h') + p\ h = \Big(x(P" - P') + p\ P\Big)e^{-x} = 0$$

$Q.33$

On écrit $P(x) = \sum_{k=1}^{p} a_k x^k$, $h(x) = P(x)e^{-x}$.
h est le produit de deux sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, elle est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

$Q.34$

On utilise la relation de récurrence donnée , et on raisonne par récurrence .

$Q.35$

La fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, on multiplie juste par x^{p-1} et on trouve :

$$g_p(x) = x^{p-1}e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+p-1}}{n!} \qquad x \in \mathbb{R}$$

En dérivant terme à terme :

$$g_p^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+p-1)\dots\ n\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!n!} x^{n-1}$$

On pose $c_n = (-1)^n \dfrac{(n+p-1)!}{(n-1)!n!} = \dfrac{p!}{b_1} b_n \quad n \geq 1$

$$x g_p^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \frac{p!}{b_1} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \frac{p!}{b_1} h(x) \Longrightarrow x g_p^{(p)}(x) = \frac{p!}{b_1} P(x) e^{-x}$$

On remarque que :

$$P(x) = Cxe^x g_p^{(p)}(x) \ , \ C = \frac{b_1}{p!}$$

$Q.36$

On prend juste $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$ quelconque , et on construit la suite $(a_n)_n$ par la relation de récurrence définit dans la question $Q.30$, la somme de la série entière est une solution de l'équation .

Comme $p \notin \mathbb{N}$, on a alors $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, et $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \longrightarrow 0$, le rayon de convergence est $+\infty$.

$Q.37$

$\dfrac{(n+1)|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{|n-p|}{n} \longrightarrow 1$, en appliquant la définition de la limite avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, on trouve le résultat.

$Q.38$

On peut soit raisonner par récurrence , soit utiliser la relation et faire le produit pour k variant de q à $n-1$.

$Q.39$

Pour tout $x \geq 0$

$$\psi(x) = \sum_{n=q}^{+\infty} |a_n| x^n \geq K \sum_{n=q}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n \ n!} = K\Big(e^{\frac{x}{2}} - R(x)\Big) \ , \ K = 2^q |a_q| \ q! \ , \ R(x) = \sum_{n=0}^{q-1} \frac{x^n}{2^n \ n!}$$

$$\psi^2(x) \frac{e^{-x}}{x} \geq \frac{K^2}{x}\Big(1 - e^{-\frac{x}{2}} \ R(x)\Big)^2 \sim_{+\infty} \frac{K^2}{x}$$

La fonction $x \longmapsto \psi^2(x) \dfrac{e^{-x}}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$, donc $\psi \notin E$.

$Q.40$

La suite $(a_n)_n$ garde un signe constant à partir du premier entier supérieur à p , soit $n_0 = \lfloor p \rfloor + 1$ cet entier , on a donc :

$|a_n| = a_n \quad \forall n \geq n_0$ ou $|a_n| = -a_n \quad \forall n \geq n_0$

Puis on utilise la question précédente.

V Éléments propres de E

$Q.41$

U est injectif , 0 n'est donc pas une valeur propre de U.

$Q.42$

λ une valeur propre de U , et f un vecteur propre associé , $U(f) = \lambda \ f$ .D'après la question $Q.18$, $U(f)$ est solution de l'équation :

$$y^{"} - y^{'} = -\frac{f(x)}{x}$$

On a donc :

$$\lambda f^{"} - \lambda f^{'} = -\frac{f(x)}{x} \Longrightarrow x(f^{"} - f^{'}) + \frac{1}{\lambda} f = 0$$

$Q.43$

f un vecteur propre associé à la valeur propre λ ,$f \in E$, d'après la question $Q.40$, on ne peut avoir $p = \dfrac{1}{\lambda} \notin \mathbb{N}^*$:

$$\lambda = \frac{1}{p} \in \mathbb{N}^*$$

$Q.44$

P est une solution de (E_p) , : $x(P" - P') + p\ P = 0.$

$U(P)$ vérifie l'équation : $y" - y' = -\dfrac{P(x)}{x} \Longrightarrow\ x(U(P)" - U(P)') + P = 0$

On pose : $T = p\ U(P) - P$:

$$T" - T' = p\Big(U(P)" - U(P)'\Big) - \Big(P" - P'\Big) = 0$$

$Q.45$

En gardant les notations de la question précédente :

$$T" - T' = 0$$

L'équation caractéristique est : $r^2 - r = 0$, on a deux racines réelles distinctes 0 et 1 :

$$\exists\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\ \ :\ p\ U(P)(x) - P(x) = T(x) = a\ e^x + b \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^{*+}$$

P et $U(P)$ sont dans E qui est un sous espace vectoriel ($Q.10$) , d'après la question $Q.3$, on doit avoir $a = b = 0$:

$$T = 0\ \Longrightarrow U(P) = \frac{1}{p}P$$

P est donc un vecteur propre de U.

$Q.46$

On prend deux entiers non nuls p, q distincts , $U(P_p) = \frac{1}{p}P_p$, $U(P_q) = \frac{1}{q}P_q$

En utilisant la question $Q.29$:

$$\langle\frac{1}{p}P_p, P_q\rangle = \langle U(P_p), P_q\rangle = \langle P_p, U(P_q)\rangle = \langle P_p, \frac{1}{q}P_q\rangle$$

On trouve :

$$\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)\langle P_p, P_q\rangle = 0\ \Longrightarrow\ \langle P_p, P_q\rangle = 0$$