Corrigé de l'épreuve de mathématiques du concours CC-INP , filière PSI, année 2022

PROBLEME 1

PARTIE I

Q1 $\forall m \in \mathbb{N}, I_{m+1} - I_m = \int_0^1 \left[(1-t^2)^{\frac{m+1}{2}} - (1+t^2)^{\frac{m}{2}}\right] dt$ (linéarité)

$$= \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \left(\sqrt{1-t^2} - 1\right) dt \leq 0$$

par positivité de l'intégrale puisque $\forall t \in [0,1]$, $(1-t^2)^{\frac{m}{2}}\left(\sqrt{1-t^2}-1\right) \leq 0$ (car $\sqrt{1-t^2} \leq 1$)

<u>Ainsi la suite $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est décroissante</u>

Q2 Soit $m \in \mathbb{N}$.

$I_{m+2} = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}+1} dt$

On pose $\begin{cases} u(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}+1} \\ v(t) = t \end{cases}$ u et v sont C^1 sur $[0,1]$ avec $\begin{cases} u'(t) = -2t(\frac{m}{2}+1)(1-t^2)^{\frac{m}{2}} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$

Par intégration par parties (ici sur un segment) :

$$I_{m+2} = [u(t)v(t)]_0^1 + \int_0^1 2(\frac{m}{2}+1)t^2(1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt = 0 - 0 + (m+2)\int_0^1 (t^2-1+1)(1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt$$

$$= -(m+2)I_{m+2} + (m+2)I_m \text{ (linéarité)}$$

Ainsi $(m+3)I_{m+2} = (m+2)I_m$

Puis enfin $\boxed{\boldsymbol{I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m}}$ puisque $m+3 \neq 0$ $(m \in \mathbb{N})$

Q3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons H_n: « $I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}}$ et $I_{2n-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} a_{n,n}$ »

• **<u>initialisation</u>** $(n = 1)$

- D'une part, calculons $a_{1,1} = \frac{\sqrt{2}}{2^3}.2 = \frac{\sqrt{2}}{2^2}$

- D'autre part, calculons $I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$. On pose $t = \sin u$ ($\varphi : \begin{array}{l} \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \longmapsto [0,1] \\ u \longmapsto \sin u \end{array}$ C^1 avec $dt = \cos u \; du$)

Donc (changement de variable sur un segment)

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 u} \; cosu \; du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \, du$ (car $\forall u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos u \geq 0$)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2u)}{2} du = \frac{\pi}{4} + \left[\frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}, \text{ or } \frac{\pi}{\sqrt{2}} a_{1,1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2^2} = \frac{\pi}{4}$$

- Enfin, $I_2 = \int_0^1 (1-t^2) dt = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$, or $\frac{\sqrt{2}}{2\,.3.a_{1,1}} = \frac{\sqrt{2}.2^2}{2\,.3.\sqrt{2}} = \frac{2}{3}$

<u>Ainsi H_1 est vraie</u>

• **hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n est vraie

Commençons par exprimer $a_{n+1,n+1}$ en fonction de $a_{n,n}$ (ceci servira ensuite)

$$a_{n+1,n+1} = \frac{\sqrt{2n+2}}{2^{2n+3}}\binom{2n+2}{n+1}$$

Or $\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)\,!}{(n+1)\,!(n+1)\,!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)\,!}{(n+1)^2 n\,!n\,!} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$

Ainsi $a_{n+1,n+1} = \frac{\sqrt{2n+2}}{2^{2n+3}}\frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{\sqrt{2}\,(2n+1)}{2^{2n+2}\sqrt{n+1}}\binom{2n}{n}.\frac{\sqrt{\mathbf{2n}}}{\sqrt{\mathbf{2n}}} = a_{n,n}.\frac{\sqrt{2}\,(2n+1)}{2\sqrt{n+1}\sqrt{2n}} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}a_{n,n}$

D'après Q2 et H_n :

$I_{2n+2} = \frac{2n+2}{2n+3}I_{2n} = \frac{2n+2}{2n+3}\frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}}$ et d'après ce qui précède :

$I_{2n+2} = \frac{2n+2}{2n+3}\frac{\sqrt{2n}\ \ (2n+1)}{2(2n+1)a_{n+1,n+1}.2\sqrt{n(n+1)}} = \frac{\sqrt{2(n+1)}}{2(2n+3)a_{n+1,n+1}}$ après simplifications

Et de même :

$$I_{2n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\,I_{2n-1} = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{\pi}{\sqrt{2n}}a_{n,n} = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{\pi}{\sqrt{2n}}\frac{2\sqrt{n(n+1)}}{2n+1}\,a_{n+1,n+1}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2n+2}}\,a_{n+1,n+1} \text{ après simplification}$$

Si bien que H_{n+1} est vraie

Le résultat est prouvé par récurrence.

Q4

Remarquons déjà que pour tout m , $I_m > 0$ (intégrale d'une fonction continue, positive, et non identiquement nulle)

Comme (I_m) est décroissante on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{2n} \leq I_{2n-1} \leq I_{2n-2}$

En divisant par $I_{2n} > 0$ on obtient l'encadrement souhaité

Puis, en remplaçant par les expressions en fonction de $a_{n,n}$ trouvées en Q3 :

$$1 \leq \frac{\pi}{\sqrt{2n}}a_{n,n}.\frac{1}{\frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}}} \leq \frac{\sqrt{2n-2}}{2(2n-1)a_{n-1,n-1}}\frac{1}{\frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}}}$$

En simplifiant et puisque $\frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n-1}} = \frac{2n-1}{2\sqrt{n-1}\sqrt{n}}$:

$$1 \leq \frac{\pi}{n}(2n+1){a_{n,n}}^2 \leq \frac{(2n+1)}{(2n-1)}\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}\frac{(2n-1)}{2\sqrt{n-1}\sqrt{n}}$$

Soit $1 \leq \frac{\pi}{n}(2n+1){a_{n,n}}^2 \leq \frac{2n+1}{2n}$, et enfin en multipliant par $\frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{2n}}$: (strictement positif)

$$\boxed{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2n}}} \leq \mathbf{2\pi {a_{n,n}}^2} \leq \mathbf{1}}$$

Q5

Le théorème d'encadrement donne alors que, quand n tend vers $+\infty$, $2\pi {a_{n,n}}^2$ tend vers 1 , donc ${a_{n,n}}^2$ tend vers $\frac{1}{2\pi}$ et puisque $a_{n,n} \geq 0$ (par produit) , $a_{n,n}$ tend vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Alors, quand n tend vers $+\infty$:

$$\boxed{\boldsymbol{I_{2n}} \sim \frac{\sqrt{2n}}{4n \, . \frac{1}{\sqrt{2\pi}}} \sim \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sqrt{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{n}}}}$$

PARTIE II

Q6 Avec le changement de variable affine $t = \sqrt{n}\, u \;\; (dt = \sqrt{n} du)$

$J_n = \sqrt{n} \int_0^1 (1-u^2)^n du = \sqrt{n}\, I_{2n}$ et donc d'après Q5 , $J_n \sim \sqrt{n}\, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

En particulier (J_n) est convergente , et sa limite est $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Q7 soit $t \in \mathbb{R}^+$

A partir d'un certain rang (qui dépend de t) , $\sqrt{n} \geq t$: il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $t \leq \sqrt{n}$,

Donc pour $n \geq n_0$, $u_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{t^2}{n})}$

Comme t est fixé, quand $n \longrightarrow +\infty$, $\frac{t^2}{n} \longrightarrow 0$ et donc $u_n(t) = e^{n\left(-\frac{t^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-t^2 + o(1)} \longrightarrow e^{-t^2}$ (continuité de l'exponentielle)

Conclusion :

la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction u définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $u(t) = e^{-t^2}$

Q8

• On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = e^x - x - 1$. ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\phi'(x) = e^x - 1$:
$\phi'(x) \geq 0$ SSI $x \geq 0$. ϕ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$, croissante sur $\mathbb{R}^+$, et $\phi(0) = 0$,donc ϕ est positive sur $\mathbb{R}$ ce qui prouve l'inégalité (éventuellement présenter le tableau de variations de ϕ)

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $t \in \mathbb{R}^+$:

- 1^er^ cas : $t \leq \sqrt{n}$: avec $x = -\frac{t^2}{n}$ on a $1 - \frac{t^2}{n} \leq e^{-\frac{t^2}{n}}$ puis en prenant à la puissance n (nombres positifs) , on obtient $u_n(t) \leq e^{-t^2}$

- 2^ème^ cas : $t > \sqrt{n}$, comme $u_n(t) = 0$ on a bien $u_n(t) \leq e^{-t^2}$

Enfin, comme u_n est une fonction positive, on conclut : **$0 \leq u_n(t) \leq e^{-t^2}$**

Q9

Soit $f : t \longmapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$. f est continue sur $\mathbb{R}$, et au voisinage de $+\infty$, $f(t) = o(\frac{1}{t^2})$ par croissances comparées

(on peut aussi dire que $f(t) = o(e^{-t})$ car $f(t).e^t = e^{-\frac{t^2}{2}+t} \longrightarrow 0$ car $-\frac{t^2}{2} + t$ tend vers $-\infty$)

Ainsi f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$,et comme elle est paire, f est intégrable sur $\mathbb{R}$

En particulier K est convergente

Puis, appliquons le théorème de convergence dominée (TCD) à J_n :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$
- d'après Q7, (u_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers $u : t \longmapsto e^{-t^2}$ qui est continue sur $[0, +\infty[$
- domination : d'après Q8, $|u_n(t)| \leq f(t)$ avec f positive, continue, intégrable sur $[0, +\infty[$, indépendante de n

Par TCD (J_n) converge vers $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

Par unicité de la limite : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Par parité $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

Enfin, pour K : posons le changement de variable affine $t = \sqrt{2}x$ $(dt = \sqrt{2}dx)$

$$\boxed{K = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} dx = 1}$$

PARTIE III

Q 10

Posons, pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $g(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x} e^{2x}\right)$ (ceci est bien possible car $\frac{1-x}{1+x} e^{2x} > 0$)

Alors par construction $e^{-2x+g(x)} = e^{-2x}.e^{g(x)} = e^{-2x}.\frac{1-x}{1+x} e^{2x} = \frac{1-x}{1+x}$

Puis, suivons l'indication :

g est dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ avec $g(x) = \int_0^x g'(t)dt$ car $g(0) = 0$

Or par exemple, pour $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$: $g(t) = \ln(1-t) - \ln(1+t) + 2t$

Donc $g'(t) = -\frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t} + 2 = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} + 2 = \frac{2}{t^2-1} + 2 = \frac{2t^2}{t^2-1}$

On obtient $g(x) = \int_0^x \frac{2t^2}{t^2-1} dt = -\int_0^x \frac{2t^2}{1-t^2} dt$

Mais, pour $t \in [0, x] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$: $1 - t^2 \geq \frac{3}{4}$

Donc par croissance de l'intégrale : $0 \leq \int_0^x \frac{2t^2}{1-t^2} dt \leq \frac{8}{3} \int_0^x t^2 dt = \frac{8}{9} x^3$

On conclut : $\boxed{|g(x)| \leq \frac{8}{9} x^3}$ (il suffit donc de poser par exemple $M = \frac{8}{9}$)

Q11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![n+1\,,2n]\!]$
(remarque : si $k = n+1$, les produits valent 1 par convention car i varie de 1 à 0)

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{\binom{2n}{k}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n)!}{k!\,(2n-k)!}\frac{n!\,n!}{(2n)!} = \frac{n!}{k!}\cdot\frac{n!}{(2n-k)!}$$

Et :

$$\frac{\prod_{i=1}^{k-n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)}{\prod_{i=1}^{k-n-1}\left(1+\frac{i}{n}\right)}\cdot\frac{n}{k} = \frac{\prod_{i=1}^{k-n-1}(n-i)}{\prod_{i=1}^{k-n-1}(n+i)}\cdot\frac{n}{k} = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(2n+1-k)}{(n+1)(n+2)\ldots(k-1)}\cdot\frac{n}{k} = \frac{n!}{(2n-k)!}\frac{n!}{k!}$$

(on a développé ici les produits pour voir lesquels sont « ascendants » et « descendants » mais on peut aussi utiliser des changements d'indice)

<u>D'où le résultat</u>

Q12

Dans les produits ci-dessus : comme $k \le \frac{3n}{2}+1$ alors $k-n-1 \le \frac{n}{2}$, donc , pour tout i tel que $i \in [\![1, k-n-1]\!]$, $\frac{i}{n} \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$

En utilisant Q10 on a alors , en notant $q(x) = \frac{1-x}{1+x}$:

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{n}{k}\cdot\prod_{i=1}^{k-n-1} q\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{n}{k}\prod_{i=1}^{k-n-1} e^{-\frac{2i}{n}+g(\frac{i}{n})} = \frac{n}{k}\left(\prod_{i=1}^{k-n-1} e^{-\frac{2i}{n}}\right)\left(\prod_{i=1}^{k-n-1} e^{g(\frac{i}{n})}\right)$$

Simplifions alors :

- $\prod_{i=1}^{k-n-1} e^{-\frac{2i}{n}} = e^{-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{k-n-1} i} = e^{-\frac{1}{n}(k-n-1)(k-n)}$
- $\prod_{i=1}^{k-n-1} e^{g(\frac{i}{n})} = e^{\sum_{i=1}^{k-n-1} g\left(\frac{i}{n}\right)}$

Et ,en posant $b_{k,n} = \sum_{i=1}^{k-n-1} g\left(\frac{i}{n}\right)$:

$|b_{k,n}| \le \sum_{i=1}^{k-n-1}\left|g\left(\frac{i}{n}\right)\right| \le \sum_{i=1}^{k-n-1} M.\frac{i^3}{n^3} \le \frac{M}{n^3}\ (k-n-1)(k-n-1)^3$

Car dans la dernière somme, il y a $k-n-1$ facteurs, tous inférieurs ou égaux à $(k-n-1)^3$

<u>On a obtenu le résultat</u>

<u>Partie IV</u>

Q13 comme $X_n(\Omega) = [\![0, 2n]\!]$, $Z_n(\Omega) = \left\{\frac{2k}{\sqrt{2n}}\ , k \in [\![-n, n]\!]\right\}$

Par ailleurs d'après le cours : $E(X_n) = 2n.\frac{1}{2} = n$ et $V(X_n) = 2n\,.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{n}{2}$

Donc par linéarité de l'espérance : $\boldsymbol{E(Z_n)} = \frac{1}{\sqrt{2n}}\ (2E(X_n) - 2n)) = \mathbf{0}$

Et par propriété de la variance , $\boldsymbol{V(Z_n)} = \frac{2}{n}\ V(X_n) = \mathbf{1}$

<u>Autrement dit Z_n est une VA centrée réduite.</u>

Q14 La fonction h_2 est définie par :

Si $t \in [-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}[$ alors $h_2(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^4$.

Si $t \in [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$ alors $h_2(t) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

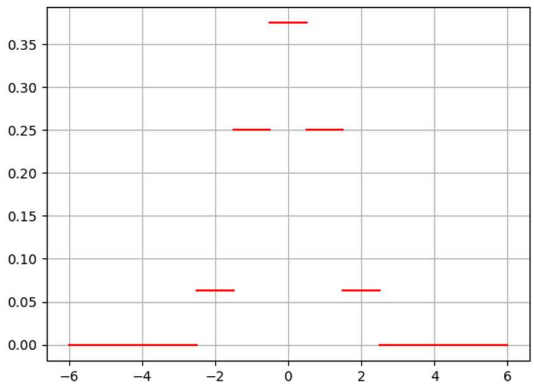
Si $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ alors $h_2(t) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

Si $t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ alors $h_2(t) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

Si $t \in [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}[$ alors $h_2(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^4$.

Et $h_2(t) = 0$ sinon.

Ce qui donne la représentation graphique suivante :



Q15 rappelons que pour $k \in [\![0,2n]\!]$:

$P(X_n = k) = \binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} = \binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.

Mais $\binom{2n}{k}$ est maximal pour $k = n$, en effet, si, à n fixé, on pose $w_k = \binom{2n}{k}$,

$\frac{w_{k+1}}{w_k} = \frac{(2n)!}{(k+1)!(2n-k-1)!}\frac{k!(2n-k)!}{(2n)!} = \frac{(2n-k)}{k+1}$ cette quantité est décroissante, vaut $\frac{n+1}{n} > 1$ pour $k = n-1$, et vaut $\frac{n}{n+1} < 1$ pour $k = n$. Donc $\forall\, k \in [\![0,2n]\!],\ w_k < w_n$.

<u>Par conséquent h_n possède un maximum, qui est atteint quand</u> $t \in J_{n,n}$ cad sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2n}}, \frac{1}{\sqrt{2n}}\right[$

Q 16 Soit $x > 0$.

Comme $\sqrt{2n}$ tend vers $+\infty$, à partir d'un certain rang n_0, $x \in \left[-\sqrt{2n} - \frac{1}{\sqrt{2n}}, \sqrt{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right[$

autrement dit pour $n \geq n_0$, $x \in \bigcup_{k=0}^{2n} J_{k,n}$ et donc **il existe $k_n \in [\![0,2n]\!]$ (unique car union disjointe) telle que $x \in J_{k_n,n}$.**

Ainsi $\frac{2(k_n-n)}{\sqrt{2n}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \leq x \leq \frac{2(k_n-n)}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}}$ ce qui s'écrit encore :

$$x - \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{2(k_n-n)}{\sqrt{2n}} \leq x + \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Par th d'encadrement $\frac{2(k_n-n)}{\sqrt{2n}} \longrightarrow x$ donc $\boxed{\boldsymbol{k_n - n \sim x\frac{\sqrt{2n}}{2}}}$

Par suite, comme $t_{k_n,n} = \frac{2(k_n-n)}{\sqrt{2n}}$, alors $\boxed{\boldsymbol{t_{k_n,n} \sim x}}$, et aussi, $k_n - n = O(\sqrt{n}) = o(n)$ donc $\boxed{\boldsymbol{k_n \sim n}}$

Q17 pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ $t_{k,n} \in J_{k,n}$, par définition de $J_{k,n}$ qui est centré en $t_{k,n}$.

Donc $h_n(t_{k,n}) = \frac{\sqrt{2n}}{2} P(X_n = k) = \frac{\sqrt{2n}}{2} \binom{2n}{k} \frac{1}{2^{2n}} = a_{k,n}$

- Soit maintenant $x > 0$ (dans un premier temps) fixé

Il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ $x \in J_{k_n,n}$ **.** Donc pour tout $n \geq n_0$, $h_n(x) = h_n(t_{k_n,n}) = a_{k_n,n}$.

Or, d'après Q16, $\frac{\sqrt{2n}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4} \leq k_n - n \leq \frac{\sqrt{2n}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}$ et donc pour n assez grand, $1 \leq k_n - n \leq \frac{n}{2} + 1$.

Cela permet alors d'utiliser Q12 et on obtient : $a_{k_n,n} = \frac{n}{k_n} e^{b_{k_n,n}} e^{-\frac{(k_n-n-1)(k_n-n)}{n}} a_{n,n}$.

L'inégalité précédente justifie que $k_n - n$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Donc $(k_n - n - 1)(k_n - n) \sim (k_n - n)^2 \sim \frac{nx^2}{2}$ par Q16.

De manière analogue, grâce à la majoration de Q12 : $b_{k_n,n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Par Q16, $\frac{n}{k_n}$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

Et par Q5, $a_{n,n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)I_{2n}} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)} 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$ et $a_{n,n}$ tend vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

En définitive, grâce à la continuité de la fonction exponentielle, on trouve que la limite de $a_{k_n,n}$, lorsque n tend vers $+\infty$, vaut $1 \times e^0 \times e^{-x^2/2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

- La fonction h_n étant paire, il en va de même pour $x < 0$.
- Et $0 \in J_{n,n}$ $donc$ $h_n(0) = a_{n,n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

On a donc prouvé que **<u>la suite de fonctions ($\boldsymbol{h_n}$) converge simplement sur</u>** $\mathbb{R}$ **<u>vers</u>** $\boldsymbol{(x \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2})}$**.**

<u>PROBLEME 2</u>

<u>PARTIE I</u>

Q18 Soit A de rang 1 : toutes les colonnes de A sont proportionnelles : il existe une colonne $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $A = (\lambda_1 C\ , \dots, \lambda_n C)$, autrement dit matriciellement $A = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

<u>Il suffit donc de poser $\boldsymbol{X = C}$ et $\boldsymbol{Y = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)}$</u>.

<u>Et ces deux matrices sont non nulles</u> sinon on aurait $A = 0$,et A ne serait pas donc pas de rang 1 mais de rang 0

Q19

Avec les mêmes notations on obtient $A = (\lambda_1 C\ ,\dots,\lambda_n C)$: toutes les colonnes de A sont proportionnelles, et A est non nulle car $C \neq (0)$ (puisque $X \neq 0$) et $\exists k \in [\![1,n]\!] | \lambda_k \neq 0$ puisque $Y \neq 0$: $\underline{\boldsymbol{rg(XY^T) = 1}}$

Q20

Avec X et Y introduits en Q18 :

$A^2 = XY^TXY^T = X(Y^TX)Y^T$ par associativité,

Or $(Y^TX) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ et on remarque que cette expression vaut $tr(A)$ (simple calcul matriciel de XY^T)

Ainsi $A^2 = tr(A).XY^T$ cad $\underline{\boldsymbol{A^2 = (trA)A}}$

Q21 pour $k \in \mathbb{N}^*$, notons H_k : "$A^k = \left(tr(A)\right)^{k-1}A$"

• **<u>initialisation</u>** $(k = 1)$

H_1 est vraie car $(trA)^0 = 1$

• **<u>hérédité</u>**

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que H_k est vraie.

Alors $A^{k+1} = A.A^k = \left(tr(A)\right)^{k-1}A^2 = \left(tr(A)\right)^{k-1}(tr(A).A) = \left(tr(A)\right)^k A$

Ainsi H_{k+1} est vraie

<u>Le résultat est prouvé par récurrence</u> (remarque : H_k est fausse pour $k = 0$)

Q22 comme $A \neq 0$: pour $k \geq 2$: $A^k = 0$ SSI $\left(tr(A)\right)^{k-1} = 0$ cad ssi $trA = 0$

(On ne peut pas avoir $A^k = 0$ pour $k = 1$ puisque $A \neq 0$)

Ainsi **<u>A est nilpotente SSI $tr(A) = 0$</u>**

Q23 comme $A^2 = tr(A)A$, $X^2 - tr(A)X$ est un polynôme annulateur de A

<u>1er cas</u> : $tr(A) = 0$, alors X^2 est annulateur de A, la seule valeur propre possible de A est 0 (seule racine de X^2), si A était diagonalisable, A serait semblable à (0) donc égale à (0) : exclu

<u>2ème cas</u> : $tr(A) \neq 0$: $X(X - tr(A))$ est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples donc par théorème A est diagonalisable

<u>Conclusion</u> : **<u>A est diagonalisable SSI $tr(A) \neq 0$</u>**

<u>PARTIE II</u>

Q 24

On trouve $\boldsymbol{A^2 = I_3}$

Donc **<u>$X^2 - 1$ est annulateur de A</u>**

Q25 $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable avec $Sp(A) \subset \{-1\,,1\}$, et plus précisément $Sp(A) = \{-1,1\}$ car $A \neq \pm I_3$

Calculons par exemple $Ker\ (A - I_3) = Ker\ (B)$ avec $B = 3A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ de rang 1 .

Ainsi par théorème du rang, $\dim Ker(B) = 2$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ainsi que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une famille libre de $Ker(B)$ (d'après les colonnes de B), donc une base de $Ker(B)$

On conclut $\boxed{\boldsymbol{E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}}$

Ensuite, on peut soit dire, que comme A est symétrique réelle, ses sous-espaces propres sont orthogonaux (mais vue la question Q26 ce n'est probablement pas ce qui est attendu …) et conclure que $E_{-1}(A) = Vect\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (avec un produit vectoriel notamment)

Soit chercher directement $Ker(A + I_3) = Ker(M)$ avec $M = 3A + 3I = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ de rang 2

Alors $\dim Ker\ M = 1$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vecteur non nul de $Ker\ M$: $\boxed{\boldsymbol{E_{-1}(A) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$

Q26

- Version courte : A étant symétrique et réelle, par théorème ses sous-espaces propres sont orthogonaux
- Version longue : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et il en est de même de : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, orthogonal à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Par bilinéarité du produit scalaire, **les sous-espaces propre de *A* sont orthogonaux**

Q 27

M1

- on prend $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vecteur unitaire de $E_1(A)$

- on prend $v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vecteur unitaire de $E_{-1}(A)$

Alors on sait que $v_2 = v_1 \wedge v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sera telle que (v_1, v_2, v_3) sera une BON de $\mathbb{R}^3$, donc v_2 sera dans $E_{-1}^{\perp} = E_1$

M2

une base orthogonale de $E_1(A)$ est $(u_1\,, u_2)$ avec (procédé de Gramm-Schmidt) :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| u_1 \right\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Une BON de $E_1(A)$ est donc (v_1, v_2) avec $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Une BON de $E_{-1}(A)$ est (v_3) avec $v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

On obtient $\boxed{\boldsymbol{A = PDP^T} \textbf{ avec } \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \textbf{ et } \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$

Q 28

Géométriquement, **l'endomorphisme canoniquement associé à A est la réflexion par rapport au plan $E_1(A)$** (dont une équation est $x + y - z = 0$)

Q29

- notons d'abord que d'après Q19 , P_V est de rang 1 et donc $\dim Im(P_V) = 1$

- ensuite , les colonnes de P_V sont toutes colinéaires à V donc $Im(P_V) \subset Vect(V)$

Par inclusion et égalité des dimensions : $\boldsymbol{ImP_V = Vect(V)}$

- soit $X \in Vect(V)^\perp$: $V^T X = 0$ et donc $P_V X = 0$: $Vect(V)^\perp \subset Ker\, P_V$

De plus $\dim Ker\, P_V = n - \dim Im(P_V)$ (th du rang) et $\dim Vect(V)^\perp = n - \dim Vect(V) = n - \dim Im(P_V)$.

Par inclusion et égalité des dimensions : $\boldsymbol{Ker\, P_V = Vect(V)^\perp}$

Q30 Calculons $P_V^2 = \frac{1}{\|V\|^4} V(V^T V)V^T = \frac{\|V\|^2}{\|V\|^4} VV^T = P_V$

Ainsi P_V est une matrice de projecteur, ou, si on confond endormorphisme et matrice, P_V est une projection.
C'est plus précisément la projection sur $Im\, P_V = Vect(V)$ et parallèlement à $Ker\, P_V = Vect(V)^\perp$, autrement dit c'est une projection orthogonale : **P_V est la projection orthogonale sur la droite $Vect(V)$**

En particulier $\boldsymbol{rg(P_V) = 1}$ (déjà dit) et $\boldsymbol{tr(P_V) = 1}$ car P_V est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

Q31 par propriété de la transposition $Q_V^T = I_n^T - \frac{2}{\|V\|^2}(V^T)^T V^T = Q_V$: **Q_V est symétrique**

De plus $Q_V^T Q_V = Q_V^2 = (I_n - 2P_V)^2 = I_n - 4P_V + 4P_V^2 = I_n$ car $P_V^2 = P_V$ (projecteur) : **Q_V est orthogonale**

Q32 symétrique et orthogonale, Q_V est une matrice de symétrie orthogonale (en effet Q_V est diagonalisable, ses sous-espaces propres sont orthogonaux, et comme elle est orthogonale ses valeurs propres sont dans $\{-1,1\}$. Ou encore $Q_V^2 = I_n$ donc Q_V est une symétrie…) :

C'est la symétrie orthogonale par rapport à $E_1(Q_V)$:

Enfin $Q_V X = X \Leftrightarrow (I_n - 2P_V)(X) = X \Leftrightarrow P_V X = 0 \Leftrightarrow X \in Ker\ P_V = Vect(V)^{\perp}$

<u>Q_V est la symétrie orthogonale par rapport à $Vect(V)^{\perp}$</u>

<u>PARTIE III</u>

Q33 par exemple :

$$\|X - U\| = \|X - V\| \Leftrightarrow \|X - U\|^2 = \|X - V\|^2\ (positif) \Leftrightarrow \|X\|^2 - 2\langle X, U\rangle + \|U\|^2 = \|X\|^2 - 2\langle X, V\rangle + \|V\|^2$$

$$\Leftrightarrow \langle X, U\rangle = \langle X, V\rangle \text{ (car } \|U\| = \|V\|)$$

$$\Leftrightarrow \langle X, U - V\rangle = 0 \Leftrightarrow X \in D^{\perp}$$

<u>Ainsi $D^{\perp}$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'ensemble des X tels que $\|X - U\| = \|X - V\|$</u>

Q34

<u>**Idée 1**</u> : on remarque que comme $\|U\| = \|V\|$, $U + V$ et $U - V$ sont orthogonaux :

$$\langle U + V, U - V\rangle = \|U\|^2 - \|V\|^2 = 0$$

Ainsi en écrivant $\boldsymbol{U = \frac{1}{2}(U - V) + \frac{1}{2}\ (U + V)}$,

<u>on a la décomposition de U sur la somme directe $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = D \oplus D^{\perp}$</u>

<u>**Idée 2**</u> : comme D est dirigée par $U - V$, on cherche une décomposition de la forme :

$U = \lambda(U - V) + W$ avec $W \in D^{\perp}$: nécessairement, $W = \lambda V + (1 - \lambda)U$.

Alors :

$W \in D^{\perp} \Leftrightarrow \langle U - V\ , \lambda V + (1 - \lambda)U\rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda\ (2\langle U, V\rangle - 2\|U\|^2) = \langle U, V\rangle - \|U\|^2$ (en utilisant que $\|U\| = \|V\|$)

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$ dans le cas où $\langle U, V\rangle - \|U\|^2 \neq 0$

On vérifie alors (voir idée 1) que la décomposition avec $\lambda = \frac{1}{2}$ convient en fait toujours

Q 35

D'après Q32 , Q_{U-V} est la symétrie orthogonale par rapport à $Vect(U - V)^{\perp} = D^{\perp}$
($Vect(U - V)$ est bien une droite car U et V étant non colinéaires, ils ne sont pas égaux)

Comme la décomposition de U sur $D^{\perp} \oplus D$ est $U = U_1 + U_2$ avec $U_1 = \frac{1}{2}\ (U + V)$ et $U_2 = \frac{1}{2}(U - V)$,

Alors : **<u>$Q_{U-V}\, U = U_1 - U_2 = V$</u>**

Q 36 soient $\widetilde{U}$ et $\widetilde{V}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

<u>1er cas</u> : $\widetilde{U}$ et $\widetilde{V}$ sont colinéaires : on choisit $Q = I_n$ convient puisque $I_n\widetilde{U} = \widetilde{U}$ est colinéaire à $\widetilde{V}$

<u>2ème cas</u> : $\widetilde{U}$ et $\widetilde{V}$ sont colinéaires (et donc en particulier non nuls) :

On pose $V = \frac{\|\widetilde{U}\|}{\|\widetilde{V}\|}\widetilde{V}$ si bien que V a même norme que $\widetilde{U}$ et n'est pas colinéaire à $\widetilde{U}$: alors Q35 fournit une matrice orthogonale (d'après Q31) telle que $Q\widetilde{U} = V$, ainsi $Q\widetilde{U}$ est colinéaire à $\widetilde{V}$

Q37 posons U : première colonne de A et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ premier vecteur de la base canonique.

D'après Q36 il existe Q orthogonale telle que QU est colinéaire à V (cad de la forme αV)

Or QU est la première colonne de QA . **Ceci prouve donc le résultat**

Q38 : On note H_n : « pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe Q orthogonale telle que QA est triangulaire supérieure »

• **initialisation** $(n = 1)$: H_1 est vraie en écrivant $A = I_n A$, A étant elle-même triangulaire supérieure

• **hérédité** : soit $n \geq 2$ telle que H_{n-1} est vraie.

D'après Q37, il existe $Q_1 \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $Q_1 A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ où $C_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$

Mais d'après H_{n-1} , il existe $Q_2 \in O_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $Q_2 C = T$, triangulaire supérieure de taille $n - 1$

On pose alors $Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ on vérifie sans peine par calculs par blocs que $Q_3 \in O_n(\mathbb{R})$

Alors : $Q_3 Q_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_2 C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ elle-même triangulaire supérieure

Ainsi en posant $Q = Q_3 Q_1$, orthogonale par produit, QA est triangulaire supérieure. H_n est vraie.

Le résultat est prouvé par récurrence.