CCINP PC 2021 Mathématiques. Un corrigé

Exercice 1. Les urnes de Polya

Je me permets dans ce modèle d'urnes d'interpréter les probabilités conditionnelles.

Partie I-Préliminaires

1. $X_1(\Omega)) = \{0, 1\}$. X_1 suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(X_1 = 1)$.
   Et $P(X_1 = 1) = \dfrac{b}{b+r}$, puisqu'il y a au départ b boules blanches sur un total de $b+r$ boules dans l'urne, et équiprobabilité de tirage de chaque boule.
   Conclusion X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{b}{b+r}$. (résultat confirmé par Q6)
2. $P(X_2 = 1|X_1 = 1) = \dfrac{b+1}{b+r+1}$ car cela correspond à un tirage d'une boule blanche dans une urne contenant $b+1$ blanches sur un total de $b+r+1$ boules.
   De même $P(X_2 = 0|X_1 = 1) = \dfrac{r}{b+r+1}$, ici tirage d'une boule rouge d'une urne contenant r rouges sur un total de $b+r+1$ boules.
   La loi conditionnelle de X_2 sachant $(X_1 = 1)$ est une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b+1}{b+r+1}$.
   Ensuite $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$. X_2 suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(X_2 = 1)$.
   J'utilise alors la formule des probabilités totales avec le s.c.e $((X_1 = 1), (X_1 = 0))$. Ce qui donne :
   $P(X_2 = 1) = P(X_2 = 1|X_1 = 1)P(X_1 = 1) + P(X_2 = 1|X_1 = 0)P(X_1 = 0)$.
   J'ai obtenu $P(X_2 = 1|X_1 = 1) = \dfrac{b+1}{b+r+1}$, de même j'ai $P(X_2 = 1|X_1 = 0) = \dfrac{b}{b+r+1}$, ainsi avec la **Q1** $P(X_2 = 1) = \dfrac{b+1}{b+r+1}\dfrac{b}{b+r} + \dfrac{b}{b+r+1}\dfrac{r}{b+r} = \dfrac{b}{b+r}$
   Conclusion X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{b}{b+r}$. (résultat confirmé par **Q6**)
3. S_n renvoie le nombre de boules blanches après le n ème tirage, et vu qu'il y a au départ b boules blanches et qu'à chaque tirage on peut avoir une boule blanche ou rouge : $S_n(\Omega) = [\![b, b+n]\!]$.

Partie II-La loi de X_n

4. $P(X_{n+1} = 1|S_n = k) = \dfrac{k}{b+r+n}$. En effet correspond à une urne contenant k boules blanches sur un total de $b+r+n$ boules.
5. Appliquons la formule des probabilités totales avec le s.c.e $((S_n = k)_{b \leq k \leq n+b})$
   $P(X_{n+1} = 1) = \sum\limits_{k=b}^{n+b} P(X_{n+1} = 1|S_n = k)P(S_n = k)$, donc avec le résultat de **Q4**
   $P(X_{n+1} = 1) = \sum\limits_{k=b}^{n+b} \dfrac{k}{b+r+n}P(S_n = k) = \dfrac{1}{b+r+n}\sum\limits_{k=b}^{n+b} kP(S_n = k) = \dfrac{1}{b+r+n}E(S_n)$ ce qui est le résultat demandé.
6. Montrons par récurrence (forte) sur $n \in \mathbb{N}^*$ que X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$.
   Amorce : $n = 1$. C'est vrai par la **Q1**.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, supposons la propriété vraie jusqu'au rang n.
   D'abord $X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1\}$, donc X_{n+1} suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(X_{n+1} = 1)$.

Ensuite par linéarité de l'espérance et hypothèse de récurrence (forte), $E(S_n) = b + n\dfrac{b}{b+r} = b\dfrac{b+r+n}{b+r}$, qu'il suffit de remplacer dans le résultat de la **Q5**, qui donne bien $P(X_{n+1}) = \dfrac{b}{b+r}$.
Conclusion : Par principe de récurrence la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie III-La loi de S_n dans un cas particulier

7. Vu que $b = 1$, $S_n = 1$ correspond à "on n'a tiré que des boules rouges aux n premiers tirages", soit $(S_n = 1) = ((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap \cdots \cap (X_n = 0))$
8. Les évènements $(X_k = 0)$ ne sont pas indépendants. J'utilise la formule des probabilités composées qui donne :
   $P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap \cdots \cap (X_n = 0)) =$
   $P(X_1 = 0) \times P(X_2 = 0|X_1 = 0) \times \dots P(X_n = 0|(X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap \cdots \cap (X_{n-1} = 0))$.
   Encore une fois ces probabilités conditionnelles s'interprètent :
   $P(X_1 = 0) = \dfrac{1}{2}$, $P(X_2 = 0|X_1 = 0) = \dfrac{2}{3}$, $P(X_n = 0|(X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap \cdots \cap (X_{n-1} = 0)) = \dfrac{n}{n+1}$.
   Et ainsi les produits se simplifient et donnent bien la formule demandée.
9. Si $S_{n+1} = k$, alors forcément $S_n = k$ ou $S_n = k - 1$. Ainsi la probabilité pour (i) est nulle.
   Ensuite pour (ii) et (iii) toujours par interprétation du conditionnement :
   $P(S_{n+1} = k|S_n = k - 1) = \dfrac{k-1}{n+2}$ correspond à une urne de $n + 2$ boules dont $k - 1$ sont blanches dont on tire une boule blanche.
   $P(S_{n+1} = k|S_n = k) = \dfrac{n+2-k}{n+2}$ correspond à une urne de $n+2$ boules dont k sont blanches, donc $n + 2 - k$ rouges, dont on tire une rouge.
10. Tout est fait. C'est la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $((S_n = \ell))_{1 \leq \ell \leq n+1}$.
    On peut remarquer que les deux cas $S_{n+1} = 1$ et $S_{n+1} = n + 2$ ont déjà été réglés par **Q8**.
11. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que S_n suit une loi uniforme sur $[\![1, n + 1]\!]$.
    Amorce : $S_1(\Omega) = [\![1, 2]\!]$, et : $(S_1 = 1) = (X_1 = 0)$, donc avec **Q1** $P(S_1 = 1) = P(X_1 = 0) = \dfrac{1}{2}$.
    $(S_1 = 2) = (X_1 = 1)$, donc avec **Q1** $P(S_1 = 1) = P(X_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$.
    Donc X_1 suit bien une loi uniforme sur $[\![1, 2]\!]$.
    Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que S_n suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
    D'abord $S_{n+1}(\Omega) = [\![1, n + 2]\!]$ par **Q3**.
    Ensuite **Q8** répond à $P(S_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{n+2}$ et $P(S_{n+1} = n + 2) = \dfrac{1}{n+2}$.
    Puis l'hypothèse de récurrence et la **Q10** répondent aux autres valeurs.
    Pour $k \in [\![2, n + 1]\!], P(S_{n+1} = k) = \dfrac{k-1}{n+2}\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{n+2-k}{n+2}\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n+2}$.
    Ainsi S_{n+1} suit une loi uniforme sur $[\![1, n + 2]\!]$.
    Conclusion : Le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par principe de récurrence.

Exercice 2. Résolution d'une équation fonctionnelle

Partie I-Existence et unicité de la solution du problème (P)

12. J'utilise ici le critère spécial des séries alternées (cssa) afin de répondre aussi à **Q14**.
    Fixons $x > 0$. Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \dfrac{1}{(x+k)^2}$.

La suite (a_k) est positive, décroissante et $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = 0$.

Ainsi le cssa assure que $\sum(-1)^k a_k$ converge, et on a bien montré la convergence simple de $\sum \varphi_k$ sur $]0, +\infty[$.

De plus le cssa assure que le reste d'ordre n, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)a_k$ est majoré en valeur absolue par a_{n+1} ce qui est exactement **Q14**.

Remarque : On pouvait aussi faire de la Convergence absolue ici.

13. Il suffit de faire un changement d'indice $j = k+1$ sur $\varphi(x+1) = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{j-1}}{(x+j)^2}$. Les deux sommes s'opposent sauf pour le premier terme de $\varphi(x)$ donnant $\dfrac{1}{x^2}$.

    On a donc bien montré le résultat demandé.

14. Démontré à **Q12**

15. D'abord la **Q13** assure la deuxième condition de (P).

    Pour la limite : Je prends $n = 0$ et j'utilise **Q14**, j'ai donc $|\varphi(x) - \varphi_0(x)| \leq \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

    Sachant que $\dfrac{1}{(x+1)^2} \to 0$, $\varphi_0(x) = \dfrac{1}{x^2} \to 0$ quand $x \to +\infty$, par simple théorème d'encadrement $\varphi(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

16. Soit f une solution du problème (P).

    Fixons $x > 0$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ l'égalité $f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(x+k)^2}$.

    Amorce : Elle est donnée par (P), $f(x) = -f(x+1) + \dfrac{1}{x^2}$.

    Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ on suppose l'égalité vraie au rang n.

    On a alors toujours avec (P) en l'appliquant en la valeur $x + n + 1 > 0$,

    $f(x+n+1) = -f(x+n+2) + \dfrac{1}{(x+n+2)^2}$.

    Il suffit alors de "l'injecter" dans l'égalité au rang n pour passer au rang $n+1$.

    Conclusion : L'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par principe de récurrence.

17. En reprenant l'égalité de **Q16**, toujours pour $x > 0$ fixé, il suffit de faire tendre $n \to +\infty$.

    Par hypothèse de (P), $f(x+n+1) \to 0$ quand $n \to +\infty$, et ainsi par définition de φ et unicité d'une limite de suite,$f(x) = \varphi(x)$.

    Ceci montre bien l'unicité de la solution de (P), et nous avons prouvé l'existence au début.

Partie II-Etude de la solution du problème (P)

18. Je note $I = [\epsilon, +\infty[$.

    Utilisons la **Q14**. $\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge uniformément sur I si et seulement si la suite des restes de la série (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle.

    Or par **Q14**, $\forall x \in I, |R_n(x)| \leq \dfrac{1}{(\epsilon+n+1)^2} \to 0$, quand $n \to +\infty$.

    Il y a donc bien convergence uniforme sur I de $\sum_{k\geq 0} \varphi_k$

19. Appliquons le théorème de continuité d'une série de fonctions. Vérifions ses hypothèses :

    i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, φ_k est continue sur I

    ii) $\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge uniformément sur I par **Q18**

    Conclusion φ est continue sur I et ceci pour tout $\epsilon > 0$, elle est donc bien continue sue $]0, +\infty[$.

    Remarque : Il y avait aussi convergence normale de $\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ sur I, j'ai juste voulu utiliser **Q14**.

    Ensuite en prenant la relation de (P), on a $x^2\varphi(x) = 1 - x^2\varphi(x+1)$.

Comme φ est continue en 1, $x^2\varphi(x+1) \to 0$ quand $x \to 0$, et ainsi $x^2\varphi(x) \to 1$ quand $x \to 0$, ce qui est exactement $\varphi(x) \sim \dfrac{1}{x^2}$ quand $x \to 0$.

20. Appliquons le théorème de dérivation d'une série de fonctions toujours sur $I = [\epsilon, +\infty[$, avec $\epsilon > 0$. Vérifions ses hypothèses :

    i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, φ_k est dérivable sur I, et $\varphi_k'(x) = \dfrac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$.

    ii) $\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge simplement sur I (car uniformément cf **Q19**)

    iii) Enfin $\sum_{k\geq 0} \varphi_k'$ converge normalement donc uniformément sur I, en effet $||\varphi_k'||_{\infty,I} = \dfrac{2}{(\epsilon+k)^3} \sim \dfrac{2}{k^3}$ et $\sum \dfrac{1}{k^3}$ converge comme série de Riemann convergente $(3 > 1)$.

    Conclusion : φ est bien dérivable sur I et ceci pour tout $\epsilon > 0$, donc sur $]0, +\infty[$, et par dérivation terme à terme on a bien l'égalité de l'énoncé.

21. J'utilise ici encore un principe du cssa (qui s'applique ici sans détails ...) et qui assure que la somme est du signe du 1er terme, ici négatif.

    Pour être exactement avec le cssa je pouvais d'abord sortir un facteur (-1).

22. φ étant décroissante sur $]0, +\infty[$, on a donc pour tout $x > 0$,

    $2\varphi(x+1) \leq \varphi(x) + \varphi(x+1) = \dfrac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x)$.

    On a donc déjà la première inégalité de l'énoncé, et pour la deuxième, il suffit de poser $x' = x+1 > 1$, obtient donc $2\varphi(x') \leq \dfrac{1}{(x'-1)^2}$. La variable étant muette, on regroupe les deux inégalités sur leur domaine commun de validité $]1, +\infty[$.

    Il suffit ensuite de multiplier par x^2 puis $x \to +\infty$ qui par théorème d'encadrement donne $2x^2\varphi(x) \to 1$ quand $x \to +\infty$, ce qui est exactement $\varphi(x) \sim \dfrac{1}{2x^2}$ quand $x \to +\infty$.

Partie III-Expression intégrale de la solution du problème (P)

Soit $x > 0$ fixé. Je note pour $k \in \mathbb{N}$, $f_k : t \mapsto t^{x+k-1}\ln(t)$. Je remarque que ces fonctions sont continues sur $]0, 1]$ et à signe constant (ici négatif). Je vais utiliser les techniques de comparaison sur $-f_k$ qui n'est autre que $|f_k|$

23. Remarquons d'abord que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $(x+k-1) > 0$, donc $f_k(t) \to 0$ quand $t \to 0$ par croissance comparée, et ainsi f_k se prolonge par continuité à l'origine. Il n'y a donc aucun problème pour ces cas.

    Pour $k = 0$, $-f_0(t) = -\dfrac{\ln(t)}{t^\alpha}$, avec $\alpha = 1 - x < 1$. Je prends alors $\alpha < \beta < 1$, et j'obtiens $-f_0(t) = o(\dfrac{1}{t^\beta})$, quand $t \to 0$.

    Or par cours $\int_0^1 \dfrac{1}{t^\beta}\mathrm{d}t$ converge, et donc par comparaison de fonctions positives, f_0 est bien intégrable sur $]0, 1]$.

    Ensuite pour calculer l'intégrale je fais une intégration par parties (IPP).

    L'intégrale étant impropre en 0, l'IPP demande justification.

    Je pose $u(t) = \ln(t)$, $u'(t) = \dfrac{1}{t}$, $v'(t) = t^{x+k-1}$, $v(t) = \dfrac{t^{x+k}}{x+k}$. u et v sont de classe C^1 sur $]0, 1]$.

    Ensuite $u(1)v(1) = 0$, il n'y a pas de problème en 1.

    $u(t)v(t) \to 0$ quand $t \to 0$ par croissance comparée.

    Ainsi la proposition sur les IPP généralisées permet d'affirmer que :

    $\int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)\mathrm{d}t = -\int_0^1 \dfrac{t^{x+k-1}}{x+k}\ln(t)\mathrm{d}t \underset{calcul}{=} \dfrac{1}{(x+k)^2}$

24. Je me permets ici de travailler sur $I =]0, 1[$ et pas sur $]0, 1]$.

Tout d'abord, par DSE usuel $\forall t \in I, \dfrac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^k$. J'obtiens donc en multipliant par $t^{x-1}\ln(t)$, $\forall t \in I, \dfrac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k f_k(t)$.

Remarque : En fait cette dernière égalité reste vraie pour $t = 1$ donnant $0 = 0$ ce qui permet de travailler sur $]0, 1]$.

Appliquons le théorème d'interversion d'une série et d'une intégrale généralisée. Vérifions ses hypothèses :

i) Pour tout $k \in \mathbb{N}, t \mapsto (-1)^k f_k(t)$ est continue sur I et intégrable sur I par **Q23**.

ii) $\sum_{k\geq 0}(-1)^k f_k(t)$ converge simplement vers $\dfrac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$

iii) Enfin il faut prouver la convergence de la série $\sum \int_I |(-1)^k f_k(t)|dt$ celle ci est assurée par la **Q23**, $\sum \int_I |(-1)^k f_k(t)|dt = \sum \dfrac{1}{(x+k)^2}$, et $\dfrac{1}{(x+k)^2} \sim_{k\to+\infty} \dfrac{1}{k^2}$ terme général d'une série de Riemann convergente.

Conclusion, d'abord $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur I et on peut intervertir série et intégrale qui encore une fois par **Q23**, donne bien l'égalité.

Remarque : On pouvait aussi partir de l'expression de $\varphi(x)$, remplacer $\dfrac{-1}{(x+k)^2}$ par son expression intégrale de **Q23** puis appliquer le théorème d'interversion série intégrale généralisée.

Exercice 3. Approximation d'une racine carrée par la méthode de Héron

Partie I. Approximantion de la racine carrée d'un réel positif

Tout d'abord l'énoncé valide l'existence de (f_k) et le caractère strictement positif des quantités. J'utiliserai ceci sans le rappeler.

25. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k(x)^2 - x = \dfrac{1}{4}(f_{k-1}(x)^2 + 2x + \dfrac{x^2}{f_{k-1}(x)^2}) - x = \dfrac{1}{4}(f_{k-1}(x)^2 + \dfrac{x^2}{f_{k-1}(x)^2} - 2x) = \dfrac{1}{4}(f_{k-1}(x) - \dfrac{x}{f_{k-1}(x)})^2 \geq 0$.

Ensuite comme $f_k(x)^2 - x = (f_k(x) - \sqrt{x})(f_k(x) + \sqrt{x})$ et $f_k(x) + \sqrt{x} > 0$ on obtient bien $f_k(x) - \sqrt{x} \geq 0$.

26. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $f_k(x) - f_{k-1}(x) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{x}{f_{k-1}(x)} - f_{k-1}(x)) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{x - f_{k-1}(x)^2}{f_{k-1}(x)})$.

On utilise alors **Q25** qui assure que $x - f_{k-1}(x)^2 \leq 0$ et donc que $f_k(x) - f_{k-1}(x) \leq 0$.

Ainsi $(f_k(x))_{k\geq 1}$ est bien décroissante.

27. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ "fixé". La suite $(f_k(x))_{k\geq 1}$ est décroissante et minorée par 0 ou mieux par $\sqrt{x}$, elle converge donc par théorème des suites monotones vers une limite que je note $\ell(x)$.

Cas $x > 0$, $\ell(x) \geq \sqrt{x} > 0$. Je peux donc passer à la limite dans la relation de récurrence qui par unicité de la limite donne $\ell(x) = \dfrac{1}{2}(\ell(x) + \dfrac{x}{\ell(x)})$, qui donne $\ell(x)^2 = x$, soit $\ell(x) = \sqrt{x}$, puisque $\ell(x) > 0$.

Le cas $x = 0$ correspond à une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ convergente vers 0.

On a bien montré la convergence simple de (f_k) vers la fonction racine carrée.

28. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $k \in \mathbb{N}$. J'applique la formule de récurrence au rang $k+1$,

$f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{1}{2}(f_k(x) + \frac{x}{f_k(x)}) - \sqrt{x} = \frac{1}{2f_k(x)}(f_k(x)^2 + x - 2\sqrt{x}f_k(x)) = \frac{1}{2f_k(x)}(f_k(x) - \sqrt{x})^2$
ce qui est l'égalité demandée.

29. D'abord je remarque que par **Q25**, $|f_k(x) - \sqrt{x}| = f_k(x) - \sqrt{x}$.
Ensuite montrons le résultat par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.
Amorce : $0 \leq f_1(x) - \sqrt{x} \leq f_1(x) = \frac{1+x}{2}$
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons l'inégalité vraie au rang k. J'utilise alors **Q28** et le fait que $0 \leq (1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}) \leq 1$, ce qui me donne bien $0 \leq f_{k+1}(x) - \sqrt{x} \leq \frac{1+x}{2^{k+1}}$.
Conclusion : Par principe de récurrence est bien vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Partie II. Généralités sur les racines carrées d'une matrice

30. Si A admet une racine carrée, il existe donc une matrice B réelle telle que $A = B^2$. Mais alors $det(A) = det(B^2) = det(B)^2 \geq 0$.
31. Suivons la démarche de l'énoncé. Supposons qu'il existe une racine carrée de A. Notons la $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
On a alors $B^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$
L'égalité $B^2 = A$ conduit à $b(a+d) = 1$ et $c(a+d) = 0$ ce qui impose $c = 0$, puis $a^2 = d^2 = 0$ ce qui conduit à $a + d = 0$ contradiction avec $b(a+d) = 1$.
Il n'y a donc pas de racine carrée pour A.
32. S est une matrice symétrique réelle, donc par le théorème spectral elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ de plus il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de S.
33. Tout d'abord comme P est orthogonale, $P^{-1} = P^T$. J'utiliserai l'une ou l'autre suivant la situation.
Ainsi $R = P\Delta P^T$ donne $R^T = P^T\Delta^T P = R$ (Δ est diagonale, donc $\Delta^T = \Delta$).
Puis $R^2 = RR = P\Delta P^{-1}P\Delta P^{-1} = PDP^{-1} = S$, puisque $\Delta^2 = D$.

Partie III. Approximation d'une racine carrée d'une matrice symétrique

P est ici la matrice définie après **Q32**. Elle vérifie donc $S = PDP^{-1}$, $P^{-1} = P^T$.

34. $P^{-1}I_nP = I_n \in \mathcal{D}_n^+$, donc $I_n \in \mathcal{C}_P$.
Ensuite Si $M \in \mathcal{C}_P$, donc il existe $\tilde{D} \in \mathcal{D}_n^+$ telle que $P^{-1}MP = \tilde{D}$. (Notation que j'utilise pour la suite) Mais alors $det(M) = det(\tilde{D}) > 0$ puisque $\tilde{D}$ est diagonale à termes stricts positifs sur la diagonale.
Ainsi M est inversible.
Ensuite $P^{-1}\frac{1}{2}(M + SM^{-1})P = \frac{1}{2}(P^{-1}MP + P^{-1}PDP^{-1}M^{-1}P) = \frac{1}{2}(\tilde{D} + D\tilde{D}^{-1})$.
Comme $\tilde{D}$, D et $\tilde{D}^{-1}$ sont dans $\mathcal{D}_n^+$ (sans détail de calcul cf **Q35**) $\frac{1}{2}(\tilde{D} + D\tilde{D}^{-1}) \in \mathcal{D}_n^+$
Ainsi $\frac{1}{2}(M + SM^{-1}) \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$.
35. En reprenant exactement le calcul de **Q34** en replaçant M par U_k j'obtiens donc la relation
$V_k = \frac{1}{2}(V_{k-1} + DV_{k-1}^{-1})$ $(*)$
V_k est diagonale. En notant $V_k = diag(\alpha_k(\lambda_1), \ldots, \alpha_k(\lambda_n))$, j'ai donc obtenu par la relation $(*)$ les relations
$\alpha_k(\lambda_i) = \frac{1}{2}(\alpha_{k-1}(\lambda_i) + \frac{\lambda_i}{\alpha_{k-1}(\lambda_i)})$, pour $1 \leq i \leq n$, et enfin avec la condition initiale $U_0 = I_n$, chaque $\alpha_0(\lambda_i) = 1$, je considère que j'ai bien prouvé le résultat sans rédiger de récurrence.

36. $R = P\Delta P^T$, $U_k = PV_kP^T$, $R - U_k = P(\Delta - V_k)P^T$ et toutes les matrices sont symétriques.
Donc $(R - U_k)(R - U_k)^T = (R - U_k)(R - U_k) = P(\Delta - V_k)^2P^T = P(\Delta - V_k)(\Delta - V_k)^TP^T$. $(R - U_k)(R - U_k)^T$ et $(\Delta - V_k)(\Delta - V_k)^T$ sont semblables ($P^T = P^{-1}$) et donc ont même trace, ce qui démontre bien $N(R - U_k) = N(\Delta - V_k)$.

37. $N(R - U_k) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(\sqrt{\lambda_i)} - f_k(\lambda_i))^2}$
J'utilise alors que $\sqrt{a_1^2 + \ldots a_n^2} \leq |a_1| + \ldots |a_n|$, qui me permet d'utiliser **Q29** et de majorer chaque terme $|\sqrt{\lambda_i)} - f_k(\lambda_i)| \leq \dfrac{1 + \lambda_i}{2^k}$, je n'ai plus qu'à sommer les inégalités pour obtenir le résultat.

38. Simple conclusion. La convergence d'une suite ne dépend pas de la norme choisie (bien entendu nous sommes en dimension finie), et donc par simple théorème d'encadrement grâce à **Q38**, comme $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{Tr(S) + n}{2^k} = 0$, on a $\lim\limits_{k \to +\infty} N(R - U_k) = 0$ c'est exactement le résultat.