SUJET CCMP 2023 MATH 2 PC CORRIGÉ

Préliminaires

1. Par équivalences,

$$AU = U \iff \begin{pmatrix} A[1,1] & \cdots & A[1,N] \\ \vdots & & \vdots \\ A[N,1] & \cdots & A[N,N] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \iff \forall i \in [\![1,N]\!] \quad \sum_{j=1}^{N} A[i,j] = 1 \iff (M_2)\ .$$

Si A et B sont des noyaux de Markov, posons $C = AB$. La relation

$$\forall (i,j) \in [\![1,N]\!]^2 \qquad C[i,j] = \sum_{k=1}^{N} A[i,k]\, B[k,j]$$

montre que tous les coefficients de C sont positifs, donc C vérifie (M_1). Enfin,

$$CU = ABU = A(BU) = AU = U$$

donc C vérifie (M_2), et C est bien un noyau de Markov.

2. C'est une récurrence immédiate. La matrice-identité $K^0 = I_N$ est bien un noyau de Markov, et l'hérédité résulte de **Q1.**

3. Comme K^n est un noyau de Markov pour tout n, on a $0 \leq K^n[i,j] \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$. On déduit la majoration $\left| \dfrac{t^n\ K^n[i,j]}{n!} \right| \leq \dfrac{|t|^n}{n!}$, la suite $\left(\dfrac{|t|^n}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ étant sommable puisqu'on reconnaît le terme général d'une série exponentielle.

Il en résulte la convergence absolue, donc la convergence, de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{t^n\ K^n[i,j]}{n!}$.

4. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Alors, pour tout couple (i,j), on a $H_t[i,j] \geq 0$ puisque c'est une somme de réels positifs. Et, pour tout $i \in [\![1,N]\!]$, comme les matrices K^n sont des noyaux de Markov,

$$\sum_{j=1}^{N} H_t[i,j] = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{t^n}{n!} \sum_{j=1}^{N} K^n[i,j] \right) = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = 1\ ,$$

donc H_t est un noyau de Markov pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

5. Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et $s \in \mathbb{R}_+$. Posons $M = H_t H_s$. Pour tout couple $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$, on a

$$\begin{aligned}
M[i,j] &= \sum_{k=1}^{N} H_t[i,k]\ H_s[k,j] \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(e^{-t} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p\ K^p[i,k]}{p!} \right) \left(e^{-s} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{s^q\ K^q[k,j]}{q!} \right) \\
&= e^{-(t+s)} \sum_{k=1}^{N} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} \frac{t^p s^q\ K^p[i,k]\ K^q[k,j]}{p!\ q!} \right) \right] && \text{(*)} \\
&= e^{-(t+s)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{p+q=n} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{t^p s^q\ K^p[i,k]\ K^q[k,j]}{p!\ q!} \right) \right] && \text{(**)} \\
&= e^{-(t+s)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{p+q=n} \binom{n}{p} t^p s^q\ K^n[i,j] \right) && \text{(***)} \\
&= e^{-(t+s)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t+s)^n\ K^n[i,j]}{n!} \ =\ H_{t+s}[i,j]\ . && \text{(****)}
\end{aligned}$$

On a donc prouvé l'égalité $H_t H_s = H_{t+s}$. On notera que $H_0 = I_N$.

Commentaires:

(*): on développe le produit de Cauchy de deux séries à termes positifs convergentes.

(**): les interversions de sommations sont permises car toutes les sommes, sauf une, sont finies, c'est la linéarité de la somme d'une série.

(***): on reconnaît le calcul des coefficients du produit matriciel $K^n = K^{p+q} = K^p K^q$.

(****): on reconnaît le développement de $(t+s)^n$ par la formule du binôme.

Partie 1 - Modélisation probabiliste

6. On a bien $K[i,j] = p_{ij} \geq 0$ puisque c'est une probabilité conditionnelle.

Cela a-t-il un sens toutefois si $P(Z_k = i) = 0$ pour tout k ?

De plus, si $k \in \mathbb{N}$, la famille $\big(\{Z_{k+1} = j\}\big)_{1 \leq j \leq N}$ est un système complet d'événements. Pour tout $i \in [\![1,N]\!]$, *en admettant qu'il existe au moins un entier naturel k tel que $P(Z_k = i) \neq 0$*, la probabilité conditionnelle $P_{\{Z_k=i\}}$ étant une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, on a alors

$$\sum_{j=1}^{N} K[i,j] = \sum_{j=1}^{N} P_{\{Z_k=i\}}(Z_{k+1} = j) = P_{\{Z_k=i\}}(\Omega) = 1 \ .$$

La matrice K est donc un noyau de Markov.

7. Pour $n = 0$, on a $Z_0 = 1$ (variable aléatoire "constante" ou "certaine"), donc

$$\forall j \in [\![1,N]\!] \qquad P(Z_0 = j) = \delta_{1,j} = I_N[1,j] = K^0[1,j] \ .$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons la propriété vraie au rang n. Alors, pour tout $j \in [\![1,N]\!]$, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(Z_{n+1} = j) &= \sum_{i=1}^{N} P(Z_{n+1} = j \mid Z_n = i)\ P(Z_n = i) \\ &= \sum_{i=1}^{N} P(Z_n = i)\ p_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{N} K^n[1,i]\ K[i,j] \ = \ K^{n+1}[1,j] \ , \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

Dans ce contexte, le programme autorise explicitement à considérer que le terme $P(Z_{n+1} = j \mid Z_n = i)\ P(Z_n = i)$ peut être remplacé par la valeur 0 si $P(Z_n = i) = 0$.

8. Comme $\big(\{Y_t = n\}\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne, pour tout $j \in [\![1,N]\!]$, $P(A_{t,j}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P\big(A_{t,j} \ \cap \ \{Y_t = n\}\big)$. Or,

$$A_{t,j} \ \cap \ \{Y_t = n\} = \{Z_n = j\} \ \cap \ \{Y_t = n\} \ .$$

Si l'on suppose les variables Y_t et Z_n indépendantes, *ce que l'énoncé omet de mentionner*, alors

$$P(A_{t,j}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z_n = j)\ P(Y_t = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-t} t^n}{n!}\ K^n[1,j] = H_t[1,j] \ .$$

Partie 2 - Étude d'un endomorphisme autoadjoint

9. L'endomorphisme u est diagonalisable, plus précisément il existe une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de u. De plus, l'hypothèse faite sur q_u signifie que u est un endomorphisme autoadjoint positif, on sait alors que ses valeurs propres sont positives, i.e. $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.

10. Notons $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_N$ les valeurs propres de u, comptées avec leur multiplicité. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_N)$ une base orthonormale de E telle que $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $x \in E$, décomposons-le dans cette base: $x = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i$. Comme $\ker(u) = E_0(u) = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $\big(\ker(u)\big)^{\perp} = \mathrm{Vect}(e_2, \cdots, e_N)$, on a $p(x) = x_1 e_1$ et $x - p(x) = \sum_{i=2}^{N} x_i e_i$, puis par Pythagore, $\big\|x - p(x)\big\|^2 = \sum_{i=2}^{N} x_i^2$ et

$$\begin{aligned} q_u\big(x - p(x)\big) &= \Big(u\big(x - p(x)\big) \,\Big|\, x - p(x)\Big) = \Big(\sum_{i=2}^{N} \lambda_i x_i e_i \,\Big|\, \sum_{j=2}^{N} x_j e_j\Big) \\ &= \sum_{i=2}^{N} \lambda_i x_i^2 \qquad \textit{(vecteurs deux à deux orthogonaux)} \\ &\geq \sum_{i=2}^{N} \lambda_2\, x_i^2 = \lambda_2 \,\big\|x - p(x)\big\|^2 . \end{aligned}$$

Partie 3 - Convergence de $H_t[i,j]$

11. Posons $L = \pi K$, alors $L \in \mathcal{M}_{1,N}(\mathbb{R})$ et, pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, on a

$$L[j] = \sum_{i=1}^{N} \pi[i]\; K[i,j] = \sum_{i=1}^{N} K[j,i]\; \pi[j] = \pi[j]\; \sum_{i=1}^{N} K[j,i] = \pi[j]$$

car la matrice K vérifie (M_2).

Remarque: Soit la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}\big(\pi[1], \cdots, \pi[N]\big) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Alors on peut noter que $\pi = U^{\top} D$ et que le caractère π-réversible de K se traduit par la relation $DK = K^{\top} D$. On a donc $\pi K = U^{\top} D K = U^{\top} K^{\top} D = (KU)^{\top} D = U^{\top} D = \pi$ en utilisant **Q1.**

12. La bilinéarité et la symétrie sont immédiates. Comme $\pi[i] > 0$ pour tout i, on a

$$\forall X \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R}) \qquad < X, X > = \sum_{i=1}^{N} \pi[i]\; X[i]^2 \geq 0$$

puisque tous les termes sont positifs. Si $< X, X > = 0$, alors chaque terme est nul, donc $X[i] = 0$ pour tout i puisque $\pi[i]$ est non nul, donc $X = 0$. On a donc le caractère défini positif.

Remarque. On peut noter que $< X, Y > = X^{\top} D Y$, la matrice diagonale D ayant été introduite ci-dessus. Comme il est immédiat que $D \in \mathcal{S}_N^{++}(\mathbb{R})$, cela donne le caractère défini positif de $< \cdot, \cdot >$.

13. Comme u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^N \simeq \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à la matrice $I_N - K$, on a $\ker(u) = \ker(I_N - K) = E_1(K)$. Or, il a été supposé que le réel 1 est valeur propre simple de K, ce qui entraîne que le sous-espace propre associé $E_1(K)$ est de dimension 1. Comme U est un vecteur non nul appartenant à cette droite vectorielle d'après **Q1.**, on déduit que $\ker(u) = \mathrm{Vect}(U)$.

Montrons que l'endomorphisme $v = \mathrm{id}_E - u : X \mapsto KX$ est autoadjoint dans l'espace euclidien E, ce qui entraînera la même propriété pour $u = \mathrm{id}_E - v$. C'est immédiat si l'on utilise les remarques formulées ci-dessus (correction des questions **11.** et **12.**) puisque, si $(X,Y) \in \big(\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})\big)^2$, on a

$$< v(X), Y > = < KX, Y > = (KX)^\top DY = X^\top K^\top DY = X^\top DKY = < X, KY > = < X, v(Y) > \ .$$

Sinon, on peut faire des calculs...

14. Pour tout $X \in E$, on a

$$\begin{aligned} q_u(X) &= < u(X), X > = \sum_{i=1}^{N} (X - KX)[i]\ X[i]\ \pi[i] \\ &= \sum_{i=1}^{N} \Big(X[i] - \sum_{j=1}^{N} K[i,j]\ X[j] \Big)\ X[i]\ \pi[i] \\ &= \sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{j=1}^{N} K[i,j]\ \big(X[i] - X[j]\big) \Big)\ X[i]\ \pi[i] \qquad \textbf{(*)} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} K[i,j]\ \big(X[i] - X[j]\big)\ X[i]\ \pi[i]\ =\ A\ . \end{aligned}$$

(*): car K vérifie la propriété (M_2).

Notons A cette première expression obtenue pour $q_u(X)$. En intervertissant les deux sommes et en échangeant les noms des indices de sommation, et enfin en utilisant le fait que K est π-réversible, on a aussi

$$\begin{aligned} q_u(X) &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} K[j,i]\ \big(X[j] - X[i]\big)\ X[j]\ \pi[j] \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} K[i,j]\ \big(X[j] - X[i]\big)\ X[j]\ \pi[i]\ =\ B\ . \end{aligned}$$

On a donc aussi $q_u(X) = \dfrac{A+B}{2}$, soit

$$\begin{aligned} q_u(X) &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2}\ K[i,j]\ \pi[i]\ \Big(\big(X[i] - X[j]\big)\ X[i] + \big(X[j] - X[i]\big)\ X[j] \Big) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \big(X[i] - X[j]\big)^2\ K[i,j]\ \pi[i]\ . \end{aligned}$$

On observe que $q_u(X) \geq 0$ pour tout X de E, on en déduit par la question **9.** (ou par le cours) que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.

Remarque. Les valeurs propres de l'endomorphisme u sont celles de la matrice $I_N - K$. Or, l'endomorphisme u de E est diagonalisable car il est autoadjoint, la matrice canoniquement associée $I_N - K$ est donc aussi diagonalisable (sur $\mathbb{R}$), il en est donc de même de la matrice K. Enfin, K étant une matrice stochastique (un "noyau de Markov"), c'est une question classique de montrer que ses valeurs propres (complexes) sont de module inférieur ou égal à 1. Le spectre de K est donc inclus dans $[-1, 1]$, et celui de $I_N - K$ (et donc de u) est alors inclus dans $[0, 2]$.

15. Commençons par dériver $h : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_N(\mathbb{R}),\ t \mapsto H_t$. La dérivation d'une fonction à valeurs dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ s'étudiant coefficient par coefficient, posons $h_{i,j}(t) = H_t[i,j]$ pour tout $(i,j) \in [\![1, N]\!]^2$. On peut écrire $h_{i,j}(t) = e^{-t}\, s_{i,j}(t)$, où $s_{i,j}(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{K^n[i,j]}{n!}\, t^n$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini d'après **Q3.** La fonction $h_{i,j}$ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $h'_{i,j}(t) = e^{-t}\left(s'_{i,j}(t) - s_{i,j}(t)\right)$. Une dérivation terme à terme (*justifiée pour une série entière dans son intervalle de convergence*) donne par ailleurs

$$\begin{aligned}
s'_{i,j}(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\, \frac{K^n[i,j]}{n!}\, t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{K^{n+1}[i,j]}{n!}\, t^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} K[i,k]\ K^n[k,j] \right) \frac{t^n}{n!} = \sum_{k=1}^{N} K[i,k] \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{K^n[k,j]}{n!}\, t^n \right) \\
&= e^t \sum_{k=1}^{N} K[i,k]\ H_t[k,j] = e^t\ (KH_t)[i,j]\ .
\end{aligned}$$

Finalement, $h'_{i,j}(t) = (KH_t)[i,j] - H_t[i,j]$ pour tout (i,j), donc $h'(t) = KH_t - H_t$.

Enfin, l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R}) \\ (M, X) & \mapsto & MX \end{array} \right.$ étant bilinéaire, il résulte du cours sur les fonctions vectorielles que $\psi_X : t \mapsto h(t) \cdot X$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \psi'_X(t) = h'(t) \cdot X = (KH_t - H_t)\, X = -(I_N - K) H_t X\ .$$

16. On a $\varphi_X(t) = \left\|\psi_X(t)\right\|^2 = < \psi_X(t), \psi_X(t) >$. Le produit scalaire étant bilinéaire, on déduit que φ_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\begin{aligned}
\varphi'_X(t) &= 2\ < \psi'_X(t), \psi_X(t) > \ = \ -2\ < (I_N - K) H_t X\ ,\ H_t X > \\
&= -2\ < u(H_t X), H_t X > \ = \ -2\, q_u(H_t X)\ .
\end{aligned}$$

17. Le vecteur U est unitaire dans l'espace euclidien E puisque $\|U\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} 1 \times 1 \times \pi[i] = 1$. On a donc $p(X) =< U, X > U$ par une formule du cours. Comme H_t est un noyau de Markov d'après **Q4.**, on a $H_t U = U$. Donc, en utilisant le fait admis que $X \mapsto H_t X$ est autoadjoint,

$$p(H_t X) = < U, H_t X > U = < H_t U, X > U = < U, X > U = p(X)\ .$$

18. • De **Q16.**, on tire $\varphi_Y'(t) = -2\, q_u(H_tY)$.

Mais $H_tY = H_t\big(X - p(X)\big) = H_tX - H_t \cdot p(X) = H_tX - p(X)$, la dernière égalité résultant du fait que $H_tU = U$ et que $p(X)$ est colinéaire à U. De la question **17.**, on déduit enfin que $H_tY = H_tX - p(H_tX)$. Comme u est autoadjoint positif et admet 0 comme valeur propre simple, il résulte alors de **Q 10.** que

$$\varphi_Y'(t) = -2\, q_u\big(H_tX - p(H_tX)\big) \le -2\,\lambda\, \big\|H_tX - p(H_tX)\big\|^2 = -2\lambda\, \|H_tY\|^2 = -2\lambda\, \varphi_Y(t)\ .$$

• On a donc $\varphi_Y'(t) + 2\lambda\, \varphi_Y(t) \le 0$, soit $e^{-2\lambda t} \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(e^{2\lambda t}\varphi_Y(t)\big) \le 0$, donc $t \mapsto e^{2\lambda t}\varphi_Y(t)$ décroît sur $\mathbb{R}_+$ d'où, pour tout $t \ge 0$, $e^{2\lambda t}\, \varphi_Y(t) \le \varphi_Y(0)$, soit $\varphi_Y(t) \le e^{-2\lambda t}\varphi_Y(0)$, soit $\|H_tY\|^2 \le e^{-2\lambda t}\, \|Y\|^2$, soit enfin

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad \big\|H_tX - p(X)\big\|^2 = \big\|H_tX - p(H_tX)\big\|^2 \le e^{-2\lambda t}\, \big\|X - p(X)\big\|^2\ .$$

19. Le vecteur U étant unitaire dans E, on a $p(E_i) = < E_i, U >\, U = \pi[i]\, U$. De **Q18.**, on déduit que

$$\big\|H_tE_i - \pi[i]\, U\big\|^2 = \big\|H_tE_i - p(E_i)\big\|^2 \le e^{-2\lambda t}\, \big\|E_i - p(E_i)\big\|^2\ .$$

Or, le vecteur $E_i - p(E_i) = E_i - \pi[i]\, U$ a toutes ses coordonnées égales à $-\pi[i]$, sauf la i-ième qui vaut $1 - \pi[i]$. Donc

$$\begin{aligned}
\big\|E_i - p(E_i)\big\|^2 &= \sum_{j \ne i} \pi[j]\, \pi[i]^2 + \pi[i]\, \big(1 - \pi[i]\big)^2 \\
&= \big(1 - \pi[i]\big)\, \pi[i]^2 + \pi[i]\, \big(1 - \pi[i]\big)^2 \\
&= \pi[i]\, \big(1 - \pi[i]\big)\ \le\ \pi[i]\ .
\end{aligned}$$

Donc $\big\|H_tE_i - \pi[i]\, U\big\|^2 \le e^{-2\lambda t}\, \pi[i]$, soit $\big\|H_tE_i - \pi[i]\, U\big\| \le e^{-\lambda t}\, \sqrt{\pi[i]}$.

20. Soit $t \in \mathbb{R}_+$, posons $u = \dfrac{t}{2}$, alors $H_u^2 = H_t$ d'après **Q5.** Par ailleurs, H_u est un noyau de Markov π-réversible, donc $\pi\, H_u = \pi$ d'après **Q11.** Partons alors de la somme S figurant au second membre de l'égalité à démontrer:

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{N} \big(H_u[i,k] - \pi[k]\big)\, \big(H_u[k,j] - \pi[j]\big) \\
&= \sum_{k=1}^{N} H_u[i,k]\, H_u[k,j] - \pi[j] \sum_{k=1}^{N} H_u[i,k] - \sum_{k=1}^{N} \pi[k]\, H_u[k,j] + \pi[j] \sum_{k=1}^{N} \pi[k] \\
&= (H_u)^2[i,j] - \pi[j] \times 1 - (\pi H_u)[j] + \pi[j] \times 1 \\
&= H_t[i,j] - \pi[j] - \pi[j] + \pi[j] \\
&= H_t[i,j] - \pi[j]\ ,
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait obtenir.

21. En posant toujours $u = \dfrac{t}{2}$, écrivons

$$H_t[i,j] - \pi[j] = \sum_{k=1}^{N} \pi[k]\, \frac{H_u[i,k] - \pi[k]}{\pi[k]}\, \big(H_u[k,j] - \pi[j]\big)\ .$$

On reconnaît alors un produit scalaire dans E, soit $H_t[i,j]-\pi[j] =< X, Y >$, en posant pour tout $k \in [\![1, N]\!]$,

$$Y[k] = H_u[k,j] - \pi[j] \qquad \text{et} \qquad X[k] = \frac{H_u[i,k]-\pi[k]}{\pi[k]} = \frac{H_u[k,i]-\pi[i]}{\pi[i]}$$

en utilisant le caractère π-réversible de H_u pour la dernière égalité.

Cela revient à dire que $X = \dfrac{1}{\pi[i]}\big(H_u E_i - \pi[i]\,U\big)$ et que $Y = H_u E_j - \pi[j]\,U$.

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace euclidien E, on déduit enfin que

$$\begin{aligned}
\big|H_t[i,j]-\pi[j]\big| &= \big| < X, Y > \big| \;\leq\; \|X\|\,\|Y\| \\
&\leq \frac{1}{\pi[i]}\,\big\|H_u E_j - \pi[j]\,U\big\|\,\big\|H_u E_i - \pi[i]\,U\big\| \\
&\leq \frac{1}{\pi[i]}\,e^{-\lambda u}\sqrt{\pi[j]}\,e^{-\lambda u}\sqrt{\pi[i]} \\
&\leq e^{-\lambda t}\sqrt{\frac{\pi[j]}{\pi[i]}}\,.
\end{aligned}$$

Comme $\lambda > 0$, on déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty} H_t[i,j] = \pi[j]$. La matrice H_t a donc pour limite, lorsque $t \to +\infty$, la matrice $L = \begin{pmatrix} \pi[1] & \pi[2] & \cdots & \pi[N] \\ \pi[1] & \pi[2] & \cdots & \pi[N] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi[1] & \pi[2] & \cdots & \pi[N] \end{pmatrix} = U\pi$, qui est un noyau de Markov π-réversible tel que $L^2 = L$ et $\mathrm{rg}(L) = 1$.