Mines 2023 PC Maths 1 – Un corrigé

Partie 1

1 – Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$.

a) On suppose que $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ et on se donne $\lambda \in \mathrm{Sp}(S)$ et X un vecteur propre associé. On a alors $X^{\mathrm{T}}SX \geq 0$. Or $X^{\mathrm{T}}SX = X^{\mathrm{T}}(\lambda X) = \lambda \|X\|^2$. Donc $\lambda \|X\|^2 \geq 0$ et comme $X \neq 0$ on a $\|X\| > 0$ et par suite $\lambda \geq 0$. Donc $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^+$.

b) Réciproquement, si $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^+$. Comme S est symétrique réelle, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1,...,e_n)$ de vecteurs propres de S, et on appelle λ_i la valeur propre associée à e_i. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de coordonnée $(y_1,...,y_n)$ dans $\mathcal{B}$:

$$X^{\mathrm{T}}SX = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \text{ par orthonormalité.}$$

Or les λ_i sont positifs, donc $X^{\mathrm{T}}SX \geq 0$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

On a montré : $\boxed{\text{Pour } S \in S_n(\mathbb{R}) \text{, on a : } S \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^+}$.

2 – Soient $A, B \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $t \in [0,1]$. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a :

$$X^{\mathrm{T}}\big(tA + (1-t)B\big)X = tX^{\mathrm{T}}AX + (1-t)X^{\mathrm{T}}BX$$

Or $X^{\mathrm{T}}AX$, $X^{\mathrm{T}}BX$, t et $1-t$ sont tous ≥ 0, donc $X^{\mathrm{T}}\big(tA + (1-t)B\big)X \geq 0$, ce qui montre $tA + (1-t)B \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Si de plus $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $X^{\mathrm{T}}AX$, $X^{\mathrm{T}}BX$ sont strictement positifs, ainsi que l'un au moins des deux réels t ou $1-t$. Donc l'un au moins des deux termes $tX^{\mathrm{T}}AX$ et $(1-t)X^{\mathrm{T}}BX$ est strictement positif, l'autre étant positif. Donc $X^{\mathrm{T}}\big(tA + (1-t)B\big)X > 0$ et $tA + (1-t)B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{S_n^+(\mathbb{R}) \text{ et } S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ sont convexes}}.$$

Par ailleurs I_n est dans $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ (car $\mathrm{Sp}(I_n) = \{1\}$) mais $\mathrm{Sp}(-I_n) = \{-1\}$ donc $-I_n$ n'appartient pas à $S_n^+(\mathbb{R})$ ni à $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Ainsi :

$$\boxed{S_n^+(\mathbb{R}) \text{ et } S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ ne sont pas des sous-espaces vectoriels de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$

3 – Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que $A = PDP^{\mathrm{T}}$, avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)$, les λ_i étant > 0. On pose alors $\Delta = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1},...,\sqrt{\lambda_n}\right)$ et $S = P\Delta P^{\mathrm{T}}$. Alors $S^{\mathrm{T}} = S$ (immédiat) et sachant $P^{\mathrm{T}}P = I_n$: $S^2 = P\Delta P^{\mathrm{T}}P\Delta P^{\mathrm{T}} = P\Delta^2 P^{\mathrm{T}} = PDP^{\mathrm{T}} = A$.

Comme en outre $S = P\Delta P^{-1}$, $\mathrm{Sp}(S) = \mathrm{Sp}(\Delta) \subset \mathbb{R}_+^*$, on a $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Pour } A \in S_n^{++}(\mathbb{R})\text{, il existe } S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ tel que } S^2 = A}.$$

4 – On prouve le résultat de l'énoncé par récurrence sur *p*.

- Pour $p = 1$: la seule famille à 1 élément de somme 1 est la famille réduite à $\lambda_1 = 1$. Il faut alors vérifier : $\forall x \in I,\ f(1x) \leq 1 f(x)$, ce qui est incontestable.
- Supposons le résultat vrai pour *p*, et donnons-nous $(x_1,\ldots,x_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+1}$ et $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{p+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{p+1}$ tel que $\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k = 1$. Un intervalle étant convexe, la propriété admise sur les convexes (énoncé page 2) nous indique que $\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k x_k \in I$ et on peut s'intéresser à $f\left(\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k x_k\right)$. On pose $t = \lambda_{p+1}$ et ainsi $1 - t = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k$. Par positivité des λ_k on a $t \geq 0$ et $1 - t \geq 0$ d'où $t \in [0,1]$. On écrit alors lorsque $\lambda_{p+1} \neq 1$: $\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k x_k = t x_{p+1} + (1-t) \sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda_k}{1-t} x_k$. On note que $\forall k \in \{1,\ldots,n\}, \frac{\lambda_k}{1-t} \geq 0$ et $\sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda_k}{1-t} = 1$, donc $\sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda_k}{1-t} x_k \in I$. Par convexité :
$$f\left(t x_{p+1} + (1-t) \sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda_k}{1-t} x_k\right) \leq t f(x_{p+1}) + (1-t) f\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda_k}{1-t} x_k\right)$$
Puis par hypothèse de récurrence sachant $\frac{\lambda_k}{1-t} \geq 0$ et $\sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda_k}{1-t} = 1$ on a $f\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda_k}{1-t} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda_k}{1-t} f(x_k)$ et finalement : $f\left(\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k x_k\right) \leq \lambda_{p+1} f(x_{p+1}) + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(x_k)$.
Par ailleurs lorsque $\lambda_{p+1} = 1$ on a nécessairement $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$ et l'inégalité ci-dessus reste valide. La propriété est donc héréditaire et on peut conclure :

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est convexe sur } I\text{, alors pour } p \in \mathbb{N}^*,\ x_1,\ldots,x_p \in I \text{ et } (\lambda_1,\ldots,\lambda_p) \in (\mathbb{R}^+)^p \text{ tel que } \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1 \text{ on a : } f\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(x_k).}$$

Partie 2

5 – La fonction ln est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x > 0, \ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. On en déduit que $\boxed{\ln \text{ est concave sur }]0,+\infty[}$.

Soit $M \in S_n^+(\mathbb{R})$, non nulle, de valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ (nécessairement positives) énoncées avec multiplicités. *M* étant diagonalisable, on a alors $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ et $\det(M) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$.

Si de plus $\forall k \in \{1,...,n\}, \lambda_k > 0$: la famille $\left(\frac{1}{n},...,\frac{1}{n}\right)$ (à n termes) est une famille de termes positifs de somme 1, donc par concavité :

$$\ln\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{n}\right) \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln(\lambda_k) = \frac{1}{n}\ln(\det(M))$$

On obtient alors le résultat voulu en composant par l'exponentielle (qui est croissante).
Si l'une au moins des valeurs propres est nulle, alors $\det(M) = 0$ tandis que $\mathrm{Tr}(M) \geq 0$ et l'inégalité reste vraie. Dans tous les cas :

$$\boxed{\text{Pour } M \in S_n^+(\mathbb{R}),\ \frac{\mathrm{Tr}(M)}{n} \geq \det^{1/n}(M)}$$

6 – Il existe P orthogonale et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)$ telles que $M = PDP^T$. Par suite :

$$\|M\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}\left(PDP^TPDP^T\right)} = \sqrt{\mathrm{Tr}\left(PD^2P^T\right)} = \sqrt{\mathrm{Tr}\left(P^T\left(PD^2\right)\right)} = \sqrt{\mathrm{Tr}\left(D^2\right)}$$

Donc : $\boxed{\|M\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2}}$.

7 – On pose $m = \max\{\lambda_1,...,\lambda_n\}$. L'inégalité admise appliquée aux valeurs propres (qui sont bien positives) nous fournit :

$$2m\left(\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(M) - \det^{1/n}(M)\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k - \det^{1/n}(M)\right)^2$$

Or M est semblable à $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)$, donc $M - \det^{1/n}(M)I_n$ est semblable à $D - \det^{1/n}(M)I_n = \mathrm{diag}\left(\lambda_1 - \det^{1/n}(M),...,\lambda_n - \det^{1/n}(M)\right)$ et par suite :

$$\left\|M - \det^{1/n}(M)I_n\right\|_2 = \prod_{k=1}^{n}\left(\lambda_k - \det^{1/n}(M)\right)$$

Donc sachant $m > 0$ (car M est positive et non nulle), on a :

$$\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(M) - \det^{1/n}(M) \geq \frac{1}{2mn}\left\|M - \det^{1/n}(M)I_n\right\|_2^2$$

Or par positivité, $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2 \geq m^2$ donc $\|M\|_2 \geq \sqrt{m^2} = m$ et $\frac{1}{m} \geq \frac{1}{\|M\|_2}$. Ainsi :

$$\boxed{\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(M) - \det^{1/n}(M) \geq \frac{\left\|M - \det^{1/n}(M)I_n\right\|_2^2}{2n\|M\|_2}}$$

Partie 3

8 – $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On sait alors qu'il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2$. Donnons-nous pour l'instant une matrice orthogonale P que nous déterminerons ultérieurement. On a : $A = SPP^{\mathrm{T}}S = (SP)(SP)^{\mathrm{T}}$, donc en posant $Q = SP$ on a bien $A = QQ^{\mathrm{T}}$ et $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ (car S et

P sont inversibles). Pour une matrice diagonale D on a $QDQ^{\mathrm{T}} = SPDP^{\mathrm{T}}S$, matrice qu'on souhaiterait égale à B, ce qui sera réalisé lorsque $S^{-1}BS^{-1} = PDP^{\mathrm{T}}$.
On peut maintenant tout remettre dans le bon ordre :

a) On pose $B' = S^{-1}BS^{-1}$. Comme S est symétrique S^{-1} l'est aussi, ainsi que B. Donc en transposant, on constate que $B' \in S_n(\mathbb{R})$.

b) Il existe P orthogonale et D diagonale telles que $B' = PDP^{\mathrm{T}}$, et on pose $Q = SP$. On a alors vu que $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ et $A = QQ^{\mathrm{T}}$. En outre on déduit de $S^{-1}BS^{-1} = B' = PDP^{\mathrm{T}}$ que $B = SPDP^{\mathrm{T}}S = QDQ^{\mathrm{T}}$.

En conclusion :

Pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A = QQ^{\mathrm{T}}$ et $B = QDQ^{\mathrm{T}}$.

De plus si $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, montrons que $B' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ce qui montrera que les éléments diagonaux de D sont strictement positifs. On se donne pour cela une valeur propre λ de B' et X un vecteur propre associé. On a $X^{\mathrm{T}}B'X = X^{\mathrm{T}}S^{-1}BS^{-1}X = \left(S^{-1}X\right)^{\mathrm{T}} B\left(S^{-1}X\right)$. Comme $X \neq 0$ et que S est inversible, on a $S^{-1}X \neq 0$ et donc $\left(S^{-1}X\right)^{\mathrm{T}} B\left(S^{-1}X\right) > 0$. Or $X^{\mathrm{T}}B'X = \lambda\|X\|^2$, donc $\lambda > 0$.

Si de plus $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, les éléments diagonaux de D sont strictement positifs

9 – On pose $u(t) = \ln\left(1+\mathrm{e}^t\right)$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée donnée pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$u'(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t} = 1 - \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}$$

u' apparait alors comme clairement décroissante sur $\mathbb{R}$ et j'en déduis :

La fonction $u : t \mapsto \ln\left(1+\mathrm{e}^t\right)$ est convexe sur $\mathbb{R}$

10 – On utilise la question 8 : on peut écrire $A = QQ^{\mathrm{T}}$, $B = QDQ^{\mathrm{T}}$ avec D diagonale à coefficients diagonaux $\lambda_1,...,\lambda_n$ tous strictement positifs car $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et Q inversible. On a donc $A+B = Q(I_n + D)Q^{\mathrm{T}}$ et donc $\det(A+B) = \det^2(Q)\prod_{k=1}^{n}(1+\lambda_k)$. Par stricte positivité, il est possible de définir $x_k = \ln(\lambda_k)$ et alors : $\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(1+\lambda_k)\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}u(x_k)$ où u est la fonction définie à la question 9. Par convexité on a :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}u(x_k) \geq u\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}x_k\right) = \ln\left(1+\left(\prod_{k=1}^{n}\lambda_k\right)^{1/n}\right) = \ln\left(1+\det^{1/n}(D)\right)$$

Donc $\ln\left(\det^{1/n}(A+B)\right) \geq \frac{2}{n}\ln\left(\det(Q)\right) + \ln\left(1+\det^{1/n}(D)\right)$, puis :

$$\det^{1/n}(A+B) \geq \left(1+\det^{1/n}(D)\right)\det^{2/n}(Q) = \det^{1/n}\left(QQ^{\mathrm{T}}\right) + \det^{1/n}\left(QBQ^{\mathrm{T}}\right)$$

On a bien montré : $\boxed{\det^{1/n}(A+B) \geq \det^{1/n}(A) + \det^{1/n}(B)}$.

11 – On note d'abord que l'inégalité demandée est trivialement vraie pour $t = 0$ ou $t = 1$.

Pour $t\in\left]0,1\right[$ on applique l'inégalité précédente à $(1-t)A$ et tB qui appartiennent bien à $S_n^{++}(\mathbb{R})$ par stricte positivité de t et $1-t$:

$$\det{}^{1/n}\left((1-t)A+tB\right)\geq\det{}^{1/n}\left((1-t)A\right)+\det{}^{1/n}(tB)=\left((1-t)^n\det(A)\right)^{1/n}+\left(t^n\det(B)\right)^{1/n}$$

Donc $\det^{1/n}\left((1-t)A+tB\right)\geq(1-t)\det^{1/n}(A)+t\det^{1/n}(B)$. Comme $\det(A)$ et $\det(B)$ sont >0, il en est de même de $(1-t)\det^{1/n}(A)+t\det^{1/n}(B)$ (par exemple par convexité de $\left]0,+\infty\right[$) et il est loisible de composer par ln :

$$\frac{1}{n}\ln\left(\det\left((1-t)A+tB\right)\right)\geq\ln\left((1-t)\det{}^{1/n}(A)+t\det{}^{1/n}(B)\right)$$

Par concavité de ln on a :

$$\begin{aligned}\ln\left((1-t)\det{}^{1/n}(A)+t\det{}^{1/n}(B)\right)&\geq(1-t)\ln\left(\det{}^{1/n}(A)\right)+t\ln\left(\det{}^{1/n}(B)\right)\\&=\frac{1}{n}\ln\left(\det{}^{1-t}(A)\det{}^{t}(B)\right)\end{aligned}$$

J'en déduis $\ln\left(\det\left((1-t)A+tB\right)\right)\geq\ln\left(\det^{1-t}(A)\det^{t}(B)\right)$ et en composant par exp on a le résultat voulu pour $t\in\left]0,1\right[$. Ainsi :

$$\boxed{\forall A,B\in S_n^{++}(\mathbb{R}),\forall t\in[0,1],\det\left((1-t)A+tB\right)\geq\det{}^{1-t}(A)\det{}^{t}(B)}$$

Par ailleurs si $A\in S_n^{+}(\mathbb{R})$ mais que $A\notin S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\det(A)=0$ et pour $t\in\left[0,1\right[$ on a $\det^{1-t}(A)=0$. Or $(1-t)A+tB\in S_n^{+}(\mathbb{R})$ par convexité de $S_n^{+}(\mathbb{R})$, donc $\det\left((1-t)A+tB\right)\geq0$ et l'inégalité reste vraie. Pour $t=1$, $\det^{1-t}(A)=1$ et l'inégalité s'écrit $\det(B)\geq\det(B)$ ce qui reste vrai. On traite de la même façons le cas $B\in S_n^{+}(\mathbb{R})$ et on peut conclure :

$$\boxed{\forall A,B\in S_n^{+}(\mathbb{R}),\forall t\in[0,1],\det\left((1-t)A+tB\right)\geq\det{}^{1-t}(A)\det{}^{t}(B)}$$

12 – Par suite, sous les mêmes hypothèses, on a pour $t\in[0,1]$:

$$\ln\left(\det\left((1-t)A+tB\right)\right)\geq(1-t)\ln\left(\det(A)\right)+t\ln\left(\det(B)\right)$$

Ainsi : $\boxed{\ln\circ\det\text{ est concave sur }S_n^{++}(\mathbb{R})}$.

Partie 4

13 – Comme $A\in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe P inversible et $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)$ telle que $P^{-1}AP=D$, et alors pour t réel : $P^{-1}(I_n+tA)P=I_n+tD=\mathrm{diag}(1+t\lambda_1,...,1+t\lambda_n)$.

Par similitude on a alors $g(t)=\det(I_n+tA)=\prod_{k=1}^{n}(1+t\lambda_k)$. Ainsi g est polynomiale et donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

14 – Pour $t \geq 0$ on a $\ln\left(\det\left(I_n + tA\right)\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 + t\lambda_k\right)\right)$ ce qui existe bien car les $1 + t\lambda_k$ sont > 0. Donc $\ln\left(\det\left(I_n + tA\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 + t\lambda_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} t\lambda_k = t\,\mathrm{Tr}\left(A\right)$. Donc :

$$\boxed{\forall t \geq 0, \ln\left(\det\left(I_n + tA\right)\right) \leq t\,\mathrm{Tr}\left(A\right)}$$

Partie 5

15 – On applique le résultat de la question 8 à A et M : il existe Q inversible et $D = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, ..., \lambda_n\right)$ telles que $A = QQ^{\mathrm{T}}$ et $tM = QDQ^{\mathrm{T}}$. Alors :

$$f_A\left(t\right) = \det\left(QQ^{\mathrm{T}} + tQDQ^{\mathrm{T}}\right) = \det^2 Q \ \det\left(I_n + tD\right) = \det^2 Q \prod_{k=1}^{n}\left(1 + t\lambda_k\right)$$

Donc f_A est polynomiale et par suite de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$.

16 – Comme $A \in S_n^{++}\left(\mathbb{R}\right)$ et $M \in S_n\left(\mathbb{R}\right)$. On applique le résultat de la question 8 : il existe une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, ..., \lambda_n\right)$ et une matrice inversible Q telles que $A = QQ^{\mathrm{T}}$ et $B = QDQ^{\mathrm{T}}$. Pour X non nul dans $\mathfrak{M}_{n,1}\left(\mathbb{R}\right)$ on a alors $X^{\mathrm{T}}\left(A + tM\right)X = X^{\mathrm{T}}Q\left(I_n + tD\right)Q^{\mathrm{T}}X$. On pose $Y = Q^{\mathrm{T}}X$ avec $Y = \left(y_1, ..., y_n\right)^{\mathrm{T}}$. Par inversibilité de Q on a $Y \neq 0$ et :

$$X^{\mathrm{T}}\left(A + tM\right)X = Y^{\mathrm{T}}\left(I_n + tD\right)Y = \sum_{k=1}^{n}\left(1 + t\lambda_k\right)y_k^2$$

Pour chaque k, la fonction $t \mapsto 1 + t\lambda_k$ est continue et strictement positive en 0. Il existe donc ε_k tel que pour $\left|t\right| < \varepsilon_k$ on ait $1 + t\lambda_k > 0$. On pose alors $\varepsilon_0 = \min_{1 \leq k \leq n} \varepsilon_k$. On a $\varepsilon_0 > 0$ (*on notera que* ε_0 *ne dépend pas de X*) et pour $\left|t\right| < \varepsilon_0$ on a $1 + t\lambda_k > 0$. Comme en outre l'un au moins des y_k est non nul, on a $\sum_{k=1}^{n}\left(1 + t\lambda_k\right)y_k^2 > 0$ et par suite $A + tM \in S_n^{++}\left(\mathbb{R}\right)$. Finalement :

$$\boxed{\exists \varepsilon_0 > 0, \forall t \in \left]-\varepsilon_0, \varepsilon_0\right[, A + tM \in S_n^{++}\left(\mathbb{R}\right)}.$$

17 – On sait (formule de Taylor-Young à l'ordre 1 pour une fonction dérivable en 0) :

$$f_A\left(t\right) \underset{t \to 0}{=} f_A\left(0\right) + tf_A'\left(0\right) + o\left(t\right)$$

On déjà $f_A\left(0\right) = \det\left(A\right)$. Reste à déterminer $f_A'\left(0\right)$.

Dans le cas où $A = I_n$, $f_{I_n}\left(t\right) = \det\left(I_n + tM\right)$. Comme $M \in S_n\left(\mathbb{R}\right)$, il existe P inversible et $D = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, ..., \lambda_n\right)$ telles que $M = PDP^{-1}$ et alors $I_n + tM = P\left(I_n + tD\right)P^{-1}$ d'où :

$$f_{I_n}\left(t\right) = \det\left(I_n + tD\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + t\lambda_k\right)$$

Donc $f_{I_n}'\left(t\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n}\left(1 + t\lambda_i\right)\right)$ et $f_{I_n}'\left(0\right) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k = \mathrm{Tr}\left(D\right) = \mathrm{Tr}\left(M\right)$.

Dans le cas général, on reprend la décomposition de la question 16 :

$$f_A(t)=\det\left(Q\left(I_n+tD\right)Q\right)=\det^2(Q)\det\left(I_n+tD\right)$$

Si on pose $g(t)=\det\left(I_n+tD\right)$, on a $g'(0)=\mathrm{Tr}(D)$ avec la première partie de la question (D est bien symétrique), et ainsi $f_A'(0)=\det^2(Q)\mathrm{Tr}(D)=\det\left(QQ^{\mathrm{T}}\right)\mathrm{Tr}(D)=\det(A)\mathrm{Tr}(D)$. Or $M=QDQ^{\mathrm{T}}$ et $A^{-1}M=\left(Q^T\right)^{-1}Q^{-1}QDQ^{\mathrm{T}}=\left(Q^T\right)^{-1}DQ$ et par similitude $\mathrm{Tr}\left(A^{-1}M\right)=\mathrm{Tr}(D)$.

Finalement $f_A'(0)=\det(A)\mathrm{Tr}\left(A^{-1}M\right)$ et la formule de Taylor s'écrit :

$$\boxed{f_A(t)\underset{t\to 0}{=}\det(A)+t\det(A)\mathrm{Tr}\left(A^{-1}M\right)+o(t)}$$

<u>ATTENTION</u> : *on aurait pu être tenté d'aller plus vite en écrivant* $f_A(t)=\det(A)\det\left(I_n+tA^{-1}M\right)$, *puis de poser* $g_U(t)=\det\left(U+tA^{-1}M\right)$ *et d'écrire* $\det\left(I_n+tA^{-1}M\right)=g_{I_n}(t)$, *mais on ne peut appliquer à* g_{I_n} *les résultats de* f_{I_n} *car* $A^{-1}M$ *n'a aucune raison d'être symétrique.*

18 – Soit $a\in\left]-\varepsilon_0,\varepsilon_0\right[$. On a pour t réel $f_A(a+t)=\det\left(A+aM+tM\right)=f_{A+aM}(t)$. Or $A+aM\in S_n^{++}(\mathbb{R})$ d'après Q16, donc d'après Q17 f_{A+aM} est dérivable en 0 et :

$$f_{A+aM}'(0)=\det\left(A+aM\right)\mathrm{Tr}\left(\left(A+aM\right)^{-1}M\right)$$

En écrivant $f_A(t)=f_{A+aM}(t-a)$, j'en déduis que f_A est dérivable en a et que $f_A'(a)=f_{A+aM}'(0)$. En remplaçant a par t, on obtient :

$$\boxed{\text{Pour } t\in\left]-\varepsilon_0,\varepsilon_0\right[,\ f_A \text{ est dérivable en } t \text{ et } f_A'(t)=\det\left(A+tM\right)\mathrm{Tr}\left(\left(A+tM\right)^{-1}M\right)}.$$

19 – Par bilinéarité du produit matriciel dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient en dérivant sur $\left]-\varepsilon_0,\varepsilon_0\right[$ l'égalité $\Phi(t)\times\left(A+tM\right)=I_n$: $\Phi'(t)\times\left(A+tM\right)+\Phi(t)M=0$ et par inversibilité de $A+tM$ sur $\left]-\varepsilon_0,\varepsilon_0\right[$ on a pour t dans cet intervalle : $\Phi'(t)=-\Phi(t)M\left(A+tM\right)^{-1}$ et donc en 0 : $\Phi'(0)=-A^{-1}MA^{-1}$. L'égalité de Taylor-Young à l'ordre 1 en 0 pour Φ donne alors :

$$\boxed{\Phi(t)\underset{t\to 0}{=}A^{-1}-tA^{-1}MA^{-1}+o(t)}$$

La position du scalaire multiplicateur t dans l'énoncé est incorrecte.

20 – On a pour $\alpha\neq 0$: $\varphi_\alpha=\dfrac{1}{\alpha}f_A^{-\alpha}$, et f_A est dérivable sur $\left]-\varepsilon_0,\varepsilon_0\right[$ et pour $t\in\left]-\varepsilon_0,\varepsilon_0\right[$ on a $f_A(t)=\det\left(A+tM\right)>0$ car $A+tM\in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Par composition avec $u\mapsto u^{-\alpha}$ qui est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$, on a la dérivabilité de φ_α sur cet intervalle.

Pour $t\in\left]-\varepsilon_0,\varepsilon_0\right[$ on a alors :

$$\varphi_\alpha'(t)=-f_A'(t)\,f_A^{-\alpha-1}(t)=-\det\left(A+tM\right)\mathrm{Tr}\left(\left(A+tM\right)^{-1}M\right)\det^{-\alpha-1}\left(A+tM\right)$$

Donc :

$$\boxed{\varphi_\alpha \text{ est dérivable sur } \left]-\varepsilon_0,\varepsilon_0\right[\text{ et } \forall t\in\left]-\varepsilon_0,\varepsilon_0\right[, \varphi_\alpha'(t)=-\mathrm{Tr}\left(\left(A+tM\right)^{-1}M\right)\det^{-\alpha}\left(A+tM\right)}$$

21 – L'application u définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), u(B) = \mathrm{Tr}(BM)$ est linéaire et l'application Φ est dérivable sur $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc l'application $t \mapsto u(\Phi(t))$ est dérivable sur $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ et sur cet intervalle : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u(\Phi(t))\right) = u(\Phi'(t))$, c'est-à-dire : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{Tr}\left((A+tM)^{-1}M\right)\right) = \mathrm{Tr}\left(-(A+tM)^{-1}M(A+tM)^{-1}M\right)$, puis par dérivée d'un produit on a sur $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$:

$$\varphi_\alpha''(t) = \mathrm{Tr}\left((A+tM)^{-1}M(A+tM)^{-1}M\right)\det^{-\alpha}(A+tM) + \alpha\,\mathrm{Tr}^2\left((A+tM)^{-1}M\right)\det^{-\alpha}(A+tM)$$

On évalue en 0 : $\varphi_\alpha''(0) = \mathrm{Tr}\left(A^{-1}MA^{-1}M\right)\det^{-\alpha}(A) + \alpha\,\mathrm{Tr}^2\left(A^{-1}M\right)\det^{-\alpha}(A)$ et finalement :

$$\boxed{\varphi_\alpha''(0) = \det^{-\alpha}(A)\left(\mathrm{Tr}\left(\left(A^{-1}M\right)^2\right) + \alpha\,\mathrm{Tr}^2\left(A^{-1}M\right)\right)}.$$

22 – Comme $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe donc $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = S^2$. On a alors $SA^{-1}MS^{-1} = S^{-1}MS^{-1}$ et $\left(S^{-1}MS^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(S^{-1}\right)^{\mathrm{T}} M^{\mathrm{T}} \left(S^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = S^{-1}MS^{-1}$ (car S^{-1} et M sont symétriques. Donc $\boxed{A^{-1}M \text{ est semblable à la matrice symétrique réelle } S^{-1}MS^{-1}}$.

23 – On reprend l'expression de $\varphi_\alpha''(0)$, et on appelle Σ une matrice symétrique réelle semblable à $A^{-1}M$. On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres. Ainsi $\left(A^{-1}M\right)^2$ est semblable à Σ^2 et : $\mathrm{Tr}\left(\left(A^{-1}M\right)^2\right) + \alpha\,\mathrm{Tr}^2\left(A^{-1}M\right) = \mathrm{Tr}\left(\Sigma^2\right) + \alpha\,\mathrm{Tr}^2(\Sigma) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 + \alpha\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)^2$.

On fait un peu d'archéologie pour récupérer les résultats de la question 4 qu'on applique à la fonction convexe $x \to x^2$: $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\lambda_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\lambda_k^2$ et donc $\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)^2 \le n\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$. Donc :

$$\mathrm{Tr}\left(\left(A^{-1}M\right)^2\right) + \alpha\,\mathrm{Tr}^2\left(A^{-1}M\right) \ge \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)^2 \ge 0 \text{ (car } \alpha \ge -\frac{1}{n})$$

Par ailleurs $\det^{-\alpha}(A) > 0$ car $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et finalement : $\boxed{\varphi_\alpha''(0) \ge 0}$.

24 – On se convainc facilement à partir de l'expressions de $\varphi_\alpha''(t)$ que φ_α'' est continue sur $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$. Par suite si $\varphi_\alpha''(0) > 0$ il existe $\eta \in]0, \varepsilon_0[$ tel que pour $|t| < \eta$ on ait $\varphi_\alpha''(t) > 0$, et donc φ_α est convexe sur $]-\eta, \eta[$ et alors : $\forall t \in]-\eta, \eta[, \varphi_\alpha(t) \ge \varphi_\alpha(0) + t\varphi_\alpha'(0)$. Sachant $\varphi_\alpha(0) = \frac{1}{\alpha}\det^{-\alpha}(0)$ et $\varphi_\alpha'(0) = -\mathrm{Tr}\left(A^{-1}M\right)\det^{-\alpha}(A)$ on obtient :

$$\boxed{\forall t \in]-\eta, \eta[, \varphi_\alpha(t) \ge \frac{1}{\alpha}\det^{-\alpha}(0) - t\,\mathrm{Tr}\left(A^{-1}M\right)\det^{-\alpha}(A)}.$$