Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 2, PC, 2020

CENTRALE-SUPÉLEC

I - Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

L'énoncé propose ici de généraliser la notion de fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle discrète au delà des variables à support dans $\mathbb{N}$.

I.A – Premières propriétés

Q 1. Par application de la formule de transfert dans le cas où $X(\Omega)$ est un ensemble fini de cardinal $r \in \mathbb{N}^*$, on a, pour tout réel t :

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}(f(X)) = \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(X = x_k)\ f(x_k) = \sum_{k=1}^{r} a_k\, \mathrm{e}^{itx_k}.$$

Q 2. Soit $t \in \mathbb{R}$: $\sum_{n\geq 0} a_n$ est (absolument) convergente (de somme 1), et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n\, \mathrm{e}^{itx_n}| \leq a_n$ donc $\sum_{n\geq 0} a_n\, \mathrm{e}^{itx_n}$ converge absolument. On applique alors la formule de transfert à nouveau, dans le cas où $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable : $\sum_{n\geq 0} a_n\, \mathrm{e}^{itx_n}$ converge absolument et $\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, \mathrm{e}^{itx_n}$.
Ainsi, Φ_X est définie sur $\mathbb{R}$.

Q 3. Remarque : si $X(\Omega)$ est un ensemble fini, on peut compléter ce support en une famille dénombrable avec des valeurs entières arbitraires que X ne prend presque sûrement jamais. On supposera par la suite, sauf mention particulière du sujet, que $X(\Omega)$ est à support dénombrable, ce qui est le cas le plus compliqué et ce qui évite le caractère répétitif de deux raisonnements quasi identiques.
On peut remarquer que, dans **Q 2.**, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ |a_n\, \mathrm{e}^{itx_n}| \leq a_n \ \text{ (majoration uniforme)}$$

donc la série de fonctions continues $\left(f_n : t \mapsto a_n\, \mathrm{e}^{itx_n}\right)_{n\geq 0}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et sa fonction somme, Φ_X, est continue sur $\mathbb{R}$.
Dans le cas d'un support fini, il ne s'agit que d'une somme finie de fonctions continues.

Q 4. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par application du théorème de transfert, là encore, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, \mathrm{e}^{it(ax_n+b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, \mathrm{e}^{iatx_n}\, \mathrm{e}^{itb} = \Phi_X(at)\, \mathrm{e}^{itb}.$$

Q 5. On suppose, comme préalablement expliqué, que $X(\Omega)$ est à support dénombrable. Soit $t \in \mathbb{R}$: :

$$\Phi_X(-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, \mathrm{e}^{i(-t)x_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, \overline{\mathrm{e}^{itx_n}} = \overline{\Phi_X(t)}\,.$$

Ainsi, Φ_X est paire si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_X(-t) = \Phi_X(t)$, c'est-à-dire si et seulement si $\Phi_X(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

I.B – Trois exemples (tirés directement du cours !)

Q 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0,1[$; si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, X suit la même loi qu'une somme $X_1 + \ldots X_n$ de n variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_X(t) = \prod_{k=1}^{n} \left(q\mathrm{e}^{i0t} + p\mathrm{e}^{i1t}\right) = \left(q + p\mathrm{e}^{it}\right)^n .$$

Q 7. Soient $p \in \,]0,1[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1}\mathrm{e}^{int} = \sum_{n=1}^{+\infty} p\mathrm{e}^{it}\left(q\mathrm{e}^{it}\right)^{n-1} = \frac{p\mathrm{e}^{it}}{1 - q\mathrm{e}^{it}}$$

(somme des termes d'une série géométrique de raison $q\mathrm{e}^{it}$ de module $q<1$).

Q 8. Soient $\lambda>0$ et $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\Phi_X(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{int}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\lambda\mathrm{e}^{it}\right)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-\lambda}\exp\left(\lambda\mathrm{e}^{it}\right)$$

(somme des termes de la série exponentielle pour l'exposant $\lambda\mathrm{e}^{it}$).

I.C – Image de Φ_X

Q 9. On peut supposer, par défaut, que $X(\Omega)$ est à support dénombrable. Soit $t\in\mathbb{R}$. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|a_n\,\mathrm{e}^{itx_n}|\le a_n$ (terme général d'une série convergente) donc, par majoration terme à terme de ces séries absolument convergentes, on a :

$$|\Phi_X(t)|\le\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n\,\mathrm{e}^{itx_n}|\le\sum_{n=0}^{+\infty}a_n=1\,.$$

Q 10. On suppose que $X(\Omega)=\{x_n,n\in\mathbb{N}\}$, qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ et $t_0\in\mathbb{R}^*$ tels que $X(\Omega)\subset a+\frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $k_n\in\mathbb{Z}$ tel que $x_n=a+\frac{2\pi k_n}{t_0}$. On a alors :

$$|\Phi_X(t_0)|=\left|\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,\exp(it_0x_n)\right|=\left|\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,\mathrm{e}^{iat_0}\,\exp(i2\pi k_n)\right|=\left|\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\right)\mathrm{e}^{iat_0}\right|=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n=1\,.$$

Q 11. On suppose réciproquement qu'il existe $t_0\in\mathbb{R}^*$ tel que $|\Phi_X(t_0)|=1$, c'est-à-dire qu'il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $\Phi_X(t_0)=\mathrm{e}^{i\theta}$. En posant $a=\frac{\theta}{t_0}$, on a :

$$\Phi_X(t_0)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,\exp(it_0x_n)=\mathrm{e}^{iat_0}\Rightarrow\Phi_X(t_0)\mathrm{e}^{-iat_0}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,\exp(i(t_0x_n-t_0a))=1\,.$$

Q 12. En particulier, la partie réelle de $\Phi_X(t_0)$ vaut 1 et donc :

$$\mathrm{Re}(\Phi_X(t_0))=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,\cos(it_0x_n)=1=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,(1-\cos(t_0x_n-t_0a))=0\,.$$

Q 13. Comme cette série est à termes positifs, cette somme n'est nulle que si et seulement si pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$a_n\,(1-\cos(t_0x_n-t_0a))=0\Rightarrow a_n=0\text{ ou }\cos(t_0(x_n-a))=1$$

donc, si $a_n\neq0$, alors $x_n\in a+\frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$.

Q 14. On peut donc conclure à la propriété réciproque de la question **Q 10** sur le support de X dans le cas où Φ_X n'est pas toujours de module strictement inférieur à 1 en dehors du point 0 :

$$\mathbb{P}\left(X\notin a+\frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left(X=x_n\text{ et }X\notin a+\frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,\mathbb{1}(x_n)=0\,\text{(formule des probabilités totales)}$$

(où $\mathbb{1}$ est la fonction indicatrice de la partie complémentaire de $a+\frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$) donc $\mathbb{P}\left(X\in a+\frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right)=1$.

II - Fonction caractéristique et loi d'une variable aléatoire

II.A – Première méthode

II.A.1) – On suppose que et on reprend les notations de la question 1.

Q 15. $X(\Omega)$ est supposé fini . Soit $T\in\mathbb{R}_+^*$:

$$V_m(T)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Phi_X(t)\,\mathrm{e}^{-imt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sum_{n=1}^{r}\mathrm{e}^{ix_nt}\,\mathbb{P}(X=x_n)\,\mathrm{e}^{-imt}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{r}\mathbb{P}(X=x_n)\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mathrm{e}^{i(x_n-m)t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Cette dernière intégrale vaut $2T$ si $x_n = m$ et $\dfrac{\mathrm{e}^{i(x_n-m)T} - \mathrm{e}^{-i(x_n-m)T}}{i\,(x_n-m)} = \dfrac{2i\sin\left((x_n-m)\,T\right)}{i\,(x_n-m)}$ sinon ; cette disjonction de cas est identique à celle de la définition du sinus cardinal : $\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{i(x_n-m)t}\,\mathrm{d}t = 1$ si $(x_n-m)\,T = 0$ et $\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{i(x_n-m)t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\sin\left((x_n-m)\,T\right)}{T\,(x_n-m)} = \mathrm{sinc}\left(T\,(x_n-m)\right)$ si $(x_n-m)\,T \neq 0$:

$$V_m(T) = \sum_{n=1}^{r} \mathrm{sinc}\left(T\,(x_n-m)\right)\mathbb{P}\left(X = x_n\right) .$$

Q 16. Soit $n \in [\![1, r]\!]$. Si $x_n = m$, $\mathrm{sinc}\left(T\,(x_n-m)\right)\mathbb{P}\left(X = x_n\right) = \mathbb{P}\left(X = x_n\right) = \mathbb{P}\left(X = m\right)$ pour tout $T > 0$.
Si $x_n \neq m$, $T \mapsto \sin\left(T\,(x_n-m)\right)\mathbb{P}\left(X = x_n\right)$ est bornée sur $]0, +\infty[$ alors que $|T\,(x_n-m)| \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par quotient de limites, on a :

$$\mathrm{sinc}\left(T\,(x_n-m)\right)\mathbb{P}\left(X = x_n\right) \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Ainsi, que m appartienne ou non au support de X (disjonction de cas, identique pour la question 20), par somme de ces r limites, on a :

$$V_m(T) \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(X = m\right) .$$

II.A.2) – On suppose que $X(\Omega)$ est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g_n(h) = \mathrm{sinc}\left(\dfrac{x_n - m}{h}\right)\mathbb{P}\left(X = x_n\right)$.

Q 17. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n\,\mathrm{e}^{itx_n}$ de fonctions continues sur le segment $[-T, T]$ converge normalement donc uniformément ce qui justifie le théorème d'interversion entre la somme et l'intégrale sur ce segment ; comme dans la question 15, on obtient :

$$V_m(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{sinc}\left(T\,(x_n-m)\right)\mathbb{P}\left(X = x_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n\left(\frac{1}{T}\right) .$$

Q 18. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque sinc est continue sur $\mathbb{R}$, par composition avec la fonction inverse, g_n est continue sur $\mathbb{R}_*^+$. De plus, par quotient de limites, sin étant bornée, sinc admet pour limite 0 en $+\infty$. Ainsi, par composition de limites, g_n se prolonge par continuité en 0 en une fonction $\tilde{g_n}$ définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\tilde{g_n}(0) = \mathbb{P}\left(X = m\right)$ si $x_n = m$ et 0 sinon.

Q 19. Comme le sinus cardinal est bornée et admet un pour maximum, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{g_n}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$, avec $\|\,\tilde{g_n}\,\|_\infty \leq \mathbb{P}\left(X = x_n\right)$ (la majoration suffit). Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \tilde{g_n}$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers sa fonction somme et $G = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g_n}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Q 20. Par continuité de G en 0 et composition des limites, on a :

$$V_m(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g_n}\left(\frac{1}{T}\right) = G\left(\frac{1}{T}\right) \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} G(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g_n}(0) = \mathbb{P}\left(X = m\right) .$$

II.A.3) – Application

Q 21. Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires discrètes telles que $\Phi_X = \Phi_Y$. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}\left(X = m\right) = \lim_{T\to+\infty} V_m(T) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \Phi_X(t)\,\mathrm{e}^{-imt}\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \Phi_Y(t)\,\mathrm{e}^{-imt}\,\mathrm{d}t = \mathbb{P}\left(Y = m\right) .$$

II.B – Deuxième méthode

Q 22. La série exponentielle est de rayon de convergence infini donc, pour tout $t \neq 0$ en particulier, on a :

$$\mathrm{e}^{itb} - \mathrm{e}^{ita} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(itb)^n}{n!} - \frac{(ita)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!}\left(b^n - a^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!}\left(b^n - a^n\right)$$

$$\Rightarrow K_{a,b} = \frac{\mathrm{e}^{itb} - \mathrm{e}^{ita}}{2it} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n\,\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)}{2\,(n+1)!}\,t^n$$

de terme constant $\dfrac{b-a}{2}$.

Ainsi, $K_{a,b}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ (rayon de convergence infini) et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Q 23. Soit N un entier naturel non nul (le cas $N=0$ étant sans intérêt). F_N est une fonction de type intégrale à paramètre. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto K_{a,x}(t)$ est continue sur le segment $[-N,N]$ donc intégrable ; pour tout $t \in [-N,N]$, $x \mapsto K_{a,x}(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{itx}}{2it} - \dfrac{\mathrm{e}^{ita}}{2it} & \text{si } t \neq 0, \\ \dfrac{x-a}{2} & \text{si } t = 0, \end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $(x,t) \mapsto \dfrac{\partial K_{a,x}(t)}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{itx} & \text{si } t \neq 0, \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } t = 0, \end{cases}$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{itx}$, continue donc intégrable par rapport à t sur le segment $[-N,N]$; enfin, il existe une fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{2}$ continue donc intégrable sur $[-N,N]$ telle que : $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [-N,N]$, $\left|\dfrac{\partial K_{a,x}(t)}{\partial x}\right| \leq \varphi(t)$ donc F_N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$F_N'(x) = \int_{-N}^{N} \frac{\partial K_{a,x}}{\partial x}(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{1}{2ix}\left(\mathrm{e}^{iNx} - \mathrm{e}^{-iNx}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ \dfrac{2N}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases} = N\,\mathrm{sinc}\,(Nx)\ .$$

Q 24. On remarque que $F_N(a) = 0$; on a donc, puisque F_N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, pour tout $b \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t = F_N(b) = F_N(a) + \int_a^b F_N'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b N\,\mathrm{sinc}\,(Nx)\,\mathrm{d}x = \int_{Na}^{Nb} \mathrm{sinc}\,(s)\,\mathrm{d}s$$

par le changement de variable $x \mapsto s = Nx$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Q 25. Puisque sinc est continue sur $\mathbb{R}$, elle l'est en particulier sur $[0,\pi]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{sinc}\,(s)\,\mathrm{d}s$ est convergente. De plus, pour tout $x \in [\pi, +\infty[$, on a :

$$\int_\pi^x \mathrm{sinc}\,(s)\,\mathrm{d}s = \int_\pi^x \frac{\sin s}{s}\,\mathrm{d}s = \left[-\frac{\cos s}{s}\right]_\pi^x - \int_\pi^x \frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s = -\frac{\cos x}{x} - \frac{1}{\pi} - \int_\pi^x \frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s$$

par intégration par parties ($u(s) = \dfrac{1}{s}$ et $v(s) = -\cos s$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\pi,+\infty[$). Or pour tout $s \in [\pi,+\infty[$, $\left|\dfrac{\cos s}{s^2}\right| \leq \dfrac{1}{s^2}$, continue et intégrable sur $[\pi,+\infty[$ (critère de Riemann), cette dernière intégrale est absolument convergente donc admet une limite quand $x \to +\infty$ (ainsi que $\dfrac{\cos x}{x}$!) : $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \mathrm{sinc}\,(s)\,\mathrm{d}s$ est elle aussi convergente.

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{sinc}\,(s)\,\mathrm{d}s$ est convergente.

Q 26. On admet : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \mathrm{sinc}\,(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} \mathrm{sinc}\,(s)\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2}$. De plus, la fonction sinc est paire, par quotient de fonctions impaires sur $\mathbb{R}^*$, on a aussi : $\displaystyle -\lim_{x\to-\infty} \int_0^x \mathrm{sinc}\,(s)\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^0 \mathrm{sinc}\,(s)\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2}$.

Enfin, $\displaystyle\int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{Nb} \mathrm{sinc}\,(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^{Na} \mathrm{sinc}\,(s)\,\mathrm{d}s$, ce qui conduit par composition de limites, à la disjonction de cas suivant si a et b sont nuls ou suivant leurs signes (strictes) respectifs, dans le cas où $a < b$: $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t = 0$ si $a < b < 0$ ou $0 < a < b$, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ si $0 = a < b$ ou $a < b = 0$, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t = \pi$ si $a < 0 < b$.

Q 27. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$, variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est fini de cardinal $r \in \mathbb{N}^*$. On suppose que les réels a et b n'appartiennent pas à $X(\Omega)$.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} \Phi_X(-t)\,K_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} \sum_{k=1}^{r} a_k\,\mathrm{e}^{-itx_k}\,K_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{r} a_k \left(\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} K_{a-x_k,b-x_k}(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{r} a_k \left(\frac{1}{\pi}\int_{N(a-x_k)}^{N(b-x_k)} \mathrm{sinc}\,(s)\,\mathrm{d}s\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(X = x_k)\ \mathbb{1}(a < x_k < b) = \mathbb{P}(a < X < b)$$

car, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $a - x_k$ et $b - x_k$ ne sont pas nuls par hypothèse, donc

$$\lim_{N \to +\infty} \int_{N(a-x_k)}^{N(b-x_k)} \operatorname{sinc}(s)\,\mathrm{d}s \;=\; \begin{cases} \pi & \text{si } a < x_k < b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

III - Régularité de Φ_X

III.A –

Q 28. Soit j un entier tel que $1 \leq j \leq k$. Soit $x \in \mathbb{R}$: si $|x| \leq 1$, $|x|^j \leq 1 \leq 1 + |x|^k$ et si $|x| > 1$, $|x|^j \leq |x|^k \leq 1 + |x|^k$. Ainsi, $|x|^j \leq 1 + |x|^k$.

Par conséquent, par majoration du terme général d'une série à termes positifs par le terme général d'une série convergente (par somme de séries convergentes), on a : $\displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n\,|x_n|^k$ et $\displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n$ convergent donc $\displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n\,x_n^j$ absolument et X admet un moment d'ordre j.

Q 29. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto a_n\,\mathrm{e}^{itx_n}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc en particulier, pour tout $j \in [\![0, k]\!]$ de $\mathcal{C}^j$ sur $\mathbb{R}$ avec $f_n^{(j)} : t \mapsto a_n\,(ix_n)^j\,\mathrm{e}^{itx_n}$.

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $j \in [\![0, k]\!]$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|a_n\,(ix_n)^j\,\mathrm{e}^{itx_n}| \leq a_n\,|x_n|^j$ (majoration uniforme par le terme général d'une série numérique convergente) : la série de fonctions $\left(f_n^{(j)}\right)_{n \geq 0}$ converge normalement (donc simplement si $j < k$ et uniformément si $j = k$) sur $\mathbb{R}$ et sa fonction somme, Φ_X, est continue sur $\mathbb{R}$. Par application du théorème de dérivation (terme à terme) d'une série de fonction, la fonction somme Φ_X de la série de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\; \Phi_X^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,i^k\,x_n^k \mathrm{e}^{itx_n}\,.$$

Q 30. D'après la question précédente, on a donc :

$$\Phi_X^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,i^k\,x_n^k = i^k\,\mathbb{E}\left(X^k\right) \Rightarrow \mathbb{E}\left(X^k\right) \,=\, (-1)^k\;i^k \,<\, \Phi_X^{(k)}(0)\;.$$

III.B –

Q 31. Φ_X est supposée de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc Φ_X admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 (Taylor-Young) :

$$2\Phi_X(0) - \Phi_X(2h) - \Phi_X(-2h) \underset{h \to 0}{=} 2\Phi_X(0) - \left(\Phi_X(0) + \Phi_X'(0)(2h) + \frac{\Phi_X''(0)}{2}(2h)^2\right)$$

$$-\left(\Phi_X(0) + \Phi_X'(0)(-2h) + \frac{\Phi_X''(0)}{2}(-2h)^2\right) + \circ\left(h^2\right) = 4\,h^2\,\Phi_X''(0) + \circ\left(h^2\right) \Rightarrow f(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \Phi_X''(0)\;.$$

Q 32. Soit $h \in \mathbb{R}^*$. Par combinaison linéaire de séries convergentes, on :

$$f(h) = \frac{1}{4\,h^2}\left(2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,\mathrm{e}^{2ihx_n} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,\mathrm{e}^{-2ihx_n}\right) = \frac{1}{4\,h^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\;(2 - 2\cos(2hx_n))\right)$$

$$= \frac{1}{4\,h^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,4\sin^2(hx_n)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,\frac{\sin^2(hx_n)}{h^2}\,.$$

Q 33. Soit $N \in_N$: pour tout $h > 0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n\,x_n^2 \operatorname{sinc}^2(hx_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x_n^2 \operatorname{sinc}^2(hx_n) = f(h)$ (somme partielle d'une série à termes positifs), donc par prolongement des inégalités, on a :

$$\lim_{h \to 0} \sum_{n=0}^{N} a_n\,x_n^2 \operatorname{sinc}^2(hx_n) = \sum_{n=0}^{N} a_n\,x_n^2 = S_N \leq \Phi_X''(0)\;.$$

Par majoration des sommes partielles de $\displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n\,x_n^2$ (à termes positifs), la série converge (absolument) et X admet un moment d'ordre 2.

III.C –

Q 34. Avec les notations de la question **Q 2.**, $\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x_n^{2k}$, série à termes positifs, donc si α est nul, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(X = x_n\right)\, x_n^{2k} = 0$ donc X est presque sûrement nulle.

Q 35. Soit $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire vérifiant $Y\left(\Omega\right) = X\left(\Omega\right)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(Y = x_n\right) = \dfrac{a_n\, x_n^{2k}}{\alpha}$. On remarque, en particulier, que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(Y = x_n\right) = 1$ et donc que la loi de Y est bien définie.

Par application de la question **Q 29.**, avec les hypothèses proposées, Φ_X, est de classe $\mathcal{C}^{2k}$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_X^{(2k)}\left(t\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\left(-1\right)^k x_n^{2k} \mathrm{e}^{itx_n} = \alpha\left(-1\right)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(Y = x_n\right)\, \mathrm{e}^{itx_n}$$

donc $\Phi_Y = \dfrac{1}{\alpha}\left(-1\right)^k \Phi_X^{(2k)}$ donc Φ_Y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Q 36. D'après **III.B**, Y admet un moment d'ordre 2 avec $\mathbb{E}\left(Y^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(Y = x_n\right)\, x_n^2 = \dfrac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(X = x_n\right)\, x_n^{2k+2}$donc X admet un moment d'ordre $2k + 2$.

Q 37. Par une récurrence simple, on montre alors que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si Φ_X est de classe $\mathcal{C}^{2k}$ sur $\mathbb{R}$, alors X admet un moment d'ordre $2k$: l'initialisation a été établie pour $k = 1$ en **III.B** et, pour un $k \in \mathbb{N}^*$, si on suppose la propriété établie au rang k et que Φ_X est de classe $\mathcal{C}^{2k+2}$ sur $\mathbb{R}$, alors elle est de classe $\mathcal{C}^{2k}$ et X admet un moment d'ordre $2k$ par hypothèse de récurrence et X admet un moment d'ordre $2k + 2$ d'après la question précédente (hérédité). On peut donc conclure par principe de récurrence à cette propriété pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

IV - Développement en série entière de Φ_X

IV.A –

Q 38. $X\left(\Omega\right)$ est supposé fini de cardinal $r \in \mathbb{N}^*$; on a, pour tout réel t, puisque la série exponentielle est de rayon de convergence infini :

$$\Phi_X(t) = \sum_{k=1}^{r} a_k\, \mathrm{e}^{itx_k} = \sum_{k=1}^{r} a_k\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(itx_k\right)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{r} a_k\, x_k^n\right)\frac{i^n}{n!}\, t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!}\,\mathbb{E}\left(X^n\right)\, t^n$$

par linéarité des sommes de séries convergentes.

Ainsi Φ_X est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t, $\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(it)^n}{n!}\,\mathbb{E}\left(X^n\right)$.

IV.B –

Q 39. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{R}$. Par application de la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n à $x \mapsto \mathrm{e}^{ix}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{e}^{iy} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^k}{k!} = \int_0^y \frac{(y-x)^n}{n!}\, i^{n+1}\, \mathrm{e}^{ix}\, \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \left|\mathrm{e}^{iy} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^k}{k!}\right| \leq \left|\int_0^y \left|\frac{(y-x)^n}{n!}\, i^{n+1}\, \mathrm{e}^{ix}\right| \mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^y \frac{|y-x|^n}{n!}\, \mathrm{d}x\right| = \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}\, .$$

Q 40. Soit $t \in \left[-\dfrac{R}{\mathrm{e}}, \dfrac{R}{\mathrm{e}}\right]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\Phi_X(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!}\,\mathbb{E}\left(X^k\right)\right| = \left|\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{itX} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(itX)^k}{k!}\right)\right| \leq \mathbb{E}\left|\mathrm{e}^{itX} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(itX)^k}{k!}\right|$$

$$\leq \mathbb{E}\left(\frac{|tX|^{n+1}}{(n+1)!}\right) = \frac{|t|^{n+1}\,\mathbb{E}|X|^{n+1}}{(n+1)!}$$

qui, d'après l'hypothèse proposée et la formule de Stirling est $\bigcirc\left(|t|^{n+1}\, \dfrac{(n+1)^{n+1}}{R^{n+1}}\, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi(n+1)}}\, \dfrac{\mathrm{e}^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\right)$ et donc $\bigcirc\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ quand $n \to +\infty$.

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}(X^n)$ converge vers $\Phi_X(t)$ et on a : $\Phi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}\left(X^k\right)$.