$\boxed{\text{EPREUVE CENTRALE PSI 2021, MATH I en 4 h}}$

I. Marche aléatoire sur un graphe

1. Même si l'énoncé n'en parle pas, on suppose qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel on travaille.
   Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons $\forall 1 \leq i \leq n$, $S_{i,k}$ l'évènement 'le point est sur le sommet i à l'étape de rang k'.
   Comme à l'étape de rang k, le point se trouve sur l'un des n sommets du graphe, la famille est $(S_{i,k})_{1 \leq i \leq n}$ est système complet d'évènements et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(S_{i,k}) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} S_{i,k}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$, soit $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)} = 1}$.

2. Soit $1 \leq j \leq n$ et $k \in \mathbb{N}$. Ecrivons alors la probabilité de $S_{j,k+1}$ à l'aide de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements $(S_{i,k})_{1 \leq i \leq n}$:

$$p_j^{(k+1)} = \mathbb{P}(S_{j,k+1}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(S_{j,k+1})|S_{i,k})\mathbb{P}(S_{i,k}) = \sum_{i=1}^{n} t_{i,j} p_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)} t_{i,j}$$

   Ce qui s'écrit matriciellement $\boxed{P^{(k+1)} = P^{(k)}T}$.
   On notera qu'il s'agit bien d'une multiplication à gauche par un vecteur ligne.

3. Par une récurrence immédiate, on obtient que $\boxed{P^{(k)} = P^{(0)}T^k}$.

4. On suppose que la suite vectorielle $(P^{(k)})_k$ converge vers un vecteur $P = (p_1, ..., p_n)$. En passant à la limite dans la relation de la question 2 et par continuité du produit matriciel (le produit matriciel est bilinéarité sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension finie), on obtient $\boxed{P = PT}$.
   De plus, la convergence d'une suite de vecteurs en dimension finie implique la convergence coordonnées par coordonnées : $\forall 1 \leq j \leq n$, la suite de réels $(p_j^{(k)})_k$ converge vers p_j.
   Comme $(p_j^{(k)})_k \geq 0$ (ce sont des probabilités), en passant à la limite, $\boxed{p_j \geq 0}$.
   Enfin, en passant à la limite dans la relation obtenue à la question 1., $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_j^{(k)} = 1$, on obtient : $\boxed{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_j = 1}$.

5. Par construction du graphe, on a $t_{i,i} = 0$ et si $i \neq j$, $t_{i,j} = 1/3$. On obtient la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(J_4 - I_4)$$

6. On remarque que J_4 est une matrice symétrique réelle. Par le théorème spectral, J_4 est diagonalisable. De plus, J_4 est de rang 1 donc par le théorème du rang, l'espace propre associé à la valeur propre 0, E_0=KerJ_4 est de dimension 3 et comme J_4 est diagonalisable, 0 est valeur propre de multiplicité 3 . Il reste une valeur propre (obligatoirement simple) pour J_4. Utilisons la trace : tr(J_4)=4 et l'autre valeur propre est donc 4. Par <u>le théorème spectral</u>, il existe $Q \in O_4(\mathbb{R})$ tel que $J_4 = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} Q^T$ et donc

$$T = \frac{1}{3}(J_4 - I_4) = \frac{1}{3}(Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} Q^T - I_4) = \frac{1}{3}(Q \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} Q^T)$$

   car $QI_4Q^T = I_4$.

7. On en déduit que $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$T^k = Q \begin{pmatrix} (-1/3)^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/3)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/3)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^T$$

En passant à la limite $(T^k)_k$ converge vers la matrice $R = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^T$.

On remarque que R est une matrice symétrique et que $R^2 = R$: R est donc la matrice $\boxed{\text{d'une projection orthogonale}}$.
De plus, R est de rang 1 donc R est la matrice d'une projection orthogonale sur une droite.
Il reste à trouver un vecteur invariant par R.

Or en regardant bien la matrice T, $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $T^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et en passant à la limite $R \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: R est la matrice de la projection orthogonale sur la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8. Soit un vecteur ligne quelconque $P^{(0)}$. On sait que $P^{(k)} = P^{(0)} T^k$ par Q3. Or on vient de voir que la suite matricielle (T^k) converge vers une matrice R. Avec la continuité du produit matriciel, la suite vectorielle $(P^{(k)})$ converge vers un vecteur noté $P = (p_1, .., p_4) = P^{(0)} R$,
Par la question 4, on a $PT = P$ donc $\frac{1}{3}(PJ_4 - P) = P$ soit encore $PJ_4 = 4P$ puis en transposant (J_4 est symétrique), $J_4 P^T = 4P^T$. P^T est donc un vecteur propre pour la matrice J_4 et la valeur propre 4. On sait que l'espace propre est une droite par Q6 et en regardant bien la matrice J_4, c'est la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur P est donc de la forme $(\lambda, \lambda, \lambda, \lambda)$ et comme par Q.4, la somme des coordonnées de P vaut 1, on a $\lambda = 1/4$ et $\boxed{P = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)}$ quel que soit le vecteur $P^{(0)}$.

9. Dans ce second exemple, on trouve la matrice

$$T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En calculant, le produit $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)T$ donne la ligne obtenue en sommant toutes les lignes de T donc $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)T = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$

10. Si on note $(e_1, ..., e_8)$ la base canonique de $\mathbb{R}^8$ et $F = Vect(e_1, e_3, e_6, e_8)$ et $G = Vect(e_2, e_4, e_5, e_7)$, L'endomorphisme t canoniquement associé à T a pour matrice dans la nouvelle base $(e_1, e_3, e_6, e_8, e_2, e_4, e_5, e_7)$:

$$\widetilde{T} = \frac{1}{3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice est possède 2 blocs nuls et si on permute l'ordre des vecteurs de $P^{(k)}$ en posant $\widetilde{P}^{(k)} = (p_1^{(k)}, p_3^{(k)}, p_6^{(k)}, p_8^{(k)}, p_2^{(k)}, p_4^{(k)}, p_5^{(k)}, p_7^{(k)}, p_1^{(k)})$, on se retrouve avec le produit $\widetilde{P}^{(k+1)} = \widetilde{P}^{(k)}\widetilde{T}$.
Si le point est en l'un des sommets de S_1, les 4 dernières coordonnées de $\widetilde{P}^{(k)}$ sont nulles et le produit matriciel donne alors que $\widetilde{P}^{(k+1)}$ a ces 4 premières coordonnées nulles : le point est en l'un des sommets de S_2. De même, en permutant des rôles de S_1 et S_2.

La rédaction plus simple suivante aurait peut-être suffit : d'après le graphe, tout point de S_1 est uniquement relié à des points S_2 et inversement tout point de S_2 est uniquement relié à des points S_1 . Un point va donc alterner entre les 2 ensembles de sommets S_1 et S_2.

11. Initialement, le point se trouve au sommet 1. Avec la question précédente, on obtient qu'après un nombre pair d'étapes, le point est dans S_1 et donc $(P^{(2k)})$ a ses coordonnées d'indices 2, 4, 5 et 7 nulles. Après un nombre impaire d'étapes, il est en S_2 et $(P^{(2k+1)})$ a ses coordonnées d'indices 1, 3, 6 et 8 nulles. Si la suite $(P^{(k)})$ était convergente vers un vecteur P, les 2 sous-suites $(P^{(2k)})$ et $(P^{(2k+1)})$ convergent aussi vers ce même vecteur P. Ce vecteur a donc toutes ces coordonnées coordonnées nulles ce qui est impossible car par Q.4, le somme des coordonnées de P vaut 1.

$\boxed{\text{La suite } (P^{(k)}) \text{ n'est donc pas convergente.}}$

II. Matrice stochastique et distributions de probabilités

12. Supposons que M soit stochastique et notons $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur colonne n'ayant que des 1.

Alors $\forall 1 \leq i \leq n$, $(MU)_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} 1 = 1$ donc $MU = U$
Réciproquement, les coefficients de M sont bien positifs ou nuls et comme $MU = U$, si $1 \leq i \leq n$, $(MU)_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} = 1$ et la matrice est stochastique.

13. Avec les notations de la partie I, on a que les $t_{i,j}$ sont positifs ou nuls et la somme de chaque ligne i avec $1 \leq i \leq n$, s'écrit

$$\sum_{j=1}^{n} t_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(S_{j,1})|S_{i,0}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbb{P}(S_{j,1} \cap S_{i,0})}{\mathbb{P}(S_{i,0})}$$

Or $(S_{j,1})_{1 \leq j \leq n}$ est un système complet d'évènements : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(S_{j,1} \cap S_{i,0}) = \mathbb{P}((\bigcup_{j=1}^{n} S_{j,1}) \cap S_{i,0}) = \mathbb{P}(S_{i,0})$ et donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{i,j} = 1$. $\boxed{\text{Une matrice de transition est stochastique}}$.

Enfin, le vecteur $P^{(k)}$ est à coordonnées positives et par Q.1, la somme de ces coordonnées valent 1 : $\boxed{P^{(k)} \text{ est une distribution de probabilité.}}$

14. Soit $1 \leq i \leq n$. Le vecteur XM a pour coordonnée d'indice i, $(XM)_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j m_{j,i}$ qui est bien positive ou nulle.
De plus, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (XM)_i = \sum_{i,j=1}^{n} x_j m_{j,i} = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} m_{j,i} = \sum_{j=1}^{n} x_j = 1$ car M est stochastique puis X est une distribution de probabilité. Donc $\boxed{XM \text{ est une distribution de probabilité}}$.
On pouvait aussi utiliser la question 12. : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (XM)_i = XMU = XU = \sum_{j=1}^{n} x_j = 1$.

15. MN est bien à coefficients positifs par définition du produit matriciel.
Utilisons la caractérisation de Q.12 : $MNU = MU = U$ car M et N sont stochastiques. Donc $\boxed{MN \text{ est stochastique}}$.

16. Soit $\alpha \in [0,1]$. Alors $\alpha \geq 0$ et $1-\alpha \geq 0$ et les coefficients de la matrice $\alpha M + (1-\alpha)N$ sont bien positifs.
Utilisons ensuite la caractérisation de Q.12,
$(\alpha M + (1-\alpha)N)U = \alpha MU + (1-\alpha)NU = \alpha U + (1-\alpha)U$ donc $\boxed{\alpha M + (1-\alpha)N \text{ est stochastique}}$.
On vient de démontrer la convexité de l'ensemble des matrices stochastiques.

17. Soit λ une valeur propre de M et V un vecteur propre associé de coordonnées $(u_i)_{1\leq i\leq n}$:
$MV = \lambda V$ et pour tout $1 \leq j \leq n$, $\lambda u_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{j,k} u_k$.
En particulier, $\lambda u_h = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{h,k} u_k = m_{h,h} u_h + \sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\neq h}} m_{h,k} u_k$.
Donc $|(\lambda - m_{h,h})u_h| \leq \displaystyle\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\neq h}} |m_{h,k} u_k| \leq \sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\neq h}} m_{h,k}|u_k| \leq \sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\neq h}} m_{h,k}|u_h|$ par définition de h.
On obtient $|\lambda - m_{h,h}||u_h| \leq \displaystyle\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\neq h}} m_{h,k}|u_h|$ et comme V est non nul (vecteur propre), $u_h \neq 0$ et

$$|\lambda - m_{h,h}| \leq \sum_{\substack{1\leq kn\\ k\neq h}} m_{h,k} = \sum_{1\leq k\leq n} m_{h,k} - m_{h,h} = 1 - m_{h,h}$$

$$\boxed{|\lambda - m_{h,h}| \leq 1 - m_{h,h}}$$

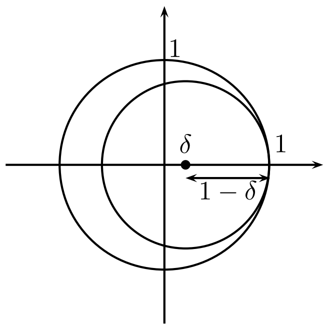
18. Avec la question précédente, $|\lambda - m_{h,h}| \leq 1 - m_{h,h}$ puis avec l'inégalité triangulaire,

$$|\lambda - \delta| \leq |\lambda - m_{h,h}| + |m_{h,h} - \delta| \leq 1 - m_{h,h} + m_{h,h} - \delta = 1 - \delta$$

car $|m_{h,h} - \delta| = m_{h,h} - \delta$ par définition de δ.

On en déduit que λ est à l'intérieur ou sur le bord du cercle centré en $(\delta, 0)$ et de rayon $1-\delta$.

Si tous les termes diagonaux de M sont strictement positifs, $\delta > 0$ et a la situation suivante.



On en déduit que 1 est alors la seule valeur propre de module 1.

19. Par Q.12, avec U toujours le vecteur de coordonnées toutes égales à 1, $MU = U$ donc U appartient à $\mathrm{Ker}(M - I_n)$ et $\mathrm{Ker}(M - I_n)$ est de dimension au moins 1.

Soit maintenant un vecteur V de $\mathrm{Ker}(M - I_n)$, V de coordonnées $(u_i)_{1\leq i\leq n}$. Notons u_k la plus petite de ses coordonnées.
Comme $MV = V$, $u_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{k,j} u_j$. Or $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{k,j} = 1$: on peut donc écrire $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{k,j} u_k = u_k = \sum_{j=1}^{n} m_{k,j} u_j$
et en faisant la différence,

$$\sum_{j=1}^{n} m_{k,j}(u_j - u_k) = 0$$

Cette dernière somme est une somme de termes positifs par définition de u_k et cette somme est nulle. On en déduit que tous ses termes sont nuls : $\forall 1 \leq j \leq n$, $m_{k,j}(u_j - u_k) = 0$. Comme M est à coefficients strictement positifs, $u_j = u_k$ pour tout $1 \leq j \leq n$ donc $V = u_k U$: V est colinéaire à U et $\mathrm{Ker}(M - I_n) \subset Vect(U)$.

On a donc bien $\boxed{\mathrm{Ker}(M - I_n) = Vect(U) \text{ est de dimension 1.}}$

20. Supposons l'existence de X et Y, 2 distributions de probabilité invariantes par M : $XM = X$ et $YM = Y$. En transposant $M^T X^T = X^T$ et comme X est non nulle, X^T est un vecteur propre M^T pour la valeur propre 1. De même pour Y^T.
Or une matrice et sa transposée ont le même rang : $M - I_n$ et $(M - I_n)^T = M^T - I_n$ ont le même rang. Par Q19 et le théorème du rang, ce rang vaut n-1 et donc $\mathrm{Ker}(M^T - I_n)$ est de dimension 1.
Les vecteurs vecteurs X^T et Y^T sont proportionnels et comme les sommes de leurs coordonnées valent 1, $X^T = Y^T$ puis $X = Y$.
$\boxed{\text{Il existe donc un plus une distribution de probabilité invariante par } M.}$

21. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq j \leq n$. Par définition, on a $\boxed{\alpha_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k+1)}.}$
Comme $M^{k+1} = MM^{(k)}$, on a $m_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{l=1}^{n} m_{i,l}^{(k)} m_{l,j}^{(k)}$
Or par définition,
$$\alpha_j^{(k)} \leq m_{l,j}^{(k)} \leq \beta_j^{(k)}$$
donc en multipliant par $m_{i,l} \geq 0$, et en sommant pour l allant de 1 à n,
$$\alpha_j^{(k)} = \alpha_j^{(k)} \sum_{l=1}^{n} m_{i,l} \leq m_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{l=1}^{n} m_{i,l} m_{l,j}^{(k)} \leq \beta_j^{(k)} \sum_{l=1}^{n} m_{i,l} = \beta_j^{(k)}$$
On a donc $\alpha_j^{(k)} \leq m_{i,j}^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k)}$ et ceci $\forall 1 \leq i \leq n$.
Avec la définition du minimum et maximum des α et β, on a $\boxed{\alpha_j^{(k)} \leq \alpha_j^{(k+1)}}$ et $\boxed{\beta_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k)}}$.

22. Par définition du minimum, il existe un indice i_0 tel que $m_{i_0,j}^{(k+1)} = \alpha_j^{(k+1)}$ et comme la matrice M est stochastique, la somme sur le ligne i_0 donne 1 : on peut écrire $\alpha_j^{(k)} = \alpha_j^{(k)} \sum_{l=1}^{n} m_{i_0,l}^{(k)}$
donc en faisant la différence,
$$\alpha_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k)} = m_{i_0,j}^{(k+1)} - \alpha_j^{(k)} \sum_{l=1}^{n} m_{i_0,l}^{(k)} = \sum_{l=1}^{n} m_{i_0,l}^{(k)} m_{l,j}^{(k)} - \sum_{l=1}^{n} m_{i_0,l}^{(k)} \alpha_j^{(k)} = \sum_{l=1}^{n} m_{i_0,l}^{(k)} (m_{l,j}^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$$
Par définition du maximum, il existe un indice j_0 tel que $m_{j_0,j}^{(k)} = \beta_j^{(k)}$ donc
$$\alpha_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k)} = m_{i_0,j_0}^{(k)} (\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j_0}}^{n} m_{i_0,l}^{(k)} (m_{l,j}^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$$
Or, dans la dernière somme, tous les termes sont positifs ou nuls donc $\boxed{\alpha_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k)} \geq m_{i_0,j_0}^{(k)} (\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})}$

23. De même avec β

24. Par définition de ε, on déduit de la question précédente,
$\alpha_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k)} \geq \varepsilon(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$ et $\beta_j^{(k)} - \beta_j^{(k+1)} \geq \varepsilon(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$.
Il reste à sommer les 2 inégalités : $\alpha_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k)} + \beta_j^{(k)} - \beta_j^{(k+1)} \geq 2\varepsilon(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})$ puis
$$\boxed{\beta_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k+1)} \leq (1 - 2\varepsilon)(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})}$$

25. Par récurrence immédiate, $0 \leq \beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)} \leq (1-2\varepsilon)^k(\beta_j^{(0)} - \alpha_j^{(0)})$.
Or $0 \leq 1 - 2\varepsilon < 1$ car M est à coefficients strictement positifs.
On en déduit par encadrement que la suite $(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})_k$ tend vers 0 . Par Q.21, les suites $(\alpha_j^{(k)})_k$ et $(\beta_j^{(k)})_k$ sont adjacentes : elles convergent vers une même limite notée b_j.
Or, on avait l'encadrement pour tout $1 \leq l \leq n$, $\alpha_j^{(k)} \leq m_{l,j}^{(k)} \leq \beta_j^{(k)}$. Par le théorème des gendarmes, la suite $(m_{l,j}^{(k)})_k$ tend vers b_j, $\forall\ 1 \leq l, j \leq n$,
On obtient alors que la suite matricielle (M^k) tend vers la matrice $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ & & \vdots & \\ b_n & b_n & \cdots & b_n \end{pmatrix}$.
Montrons que B est stochastique.
B est déjà à coefficients positifs car chaque b_j est limite d'une suite de réels positifs.
Ensuite comme M est stochastique , par Q.15, M^k l'est aussi pour tout naturel k donc $M^kU = U$. En passant à la limite (continuité du produit matriciel), $BU = U$: $\boxed{B \text{ est stochastique.}}$

26. Supposons qu'il existe un j tel que $b_j = 0$. Comme $M^kM = M^{k+1}$, en passant à la limite, $BM = B$ ce qui donne $P^\infty M = P^\infty$ et la $j$ième coordonnée de ce produit s'écrit $b_j = 0 = \sum_{k=1}^{n} b_k m_{k,j}$: on a une somme de termes positifs qui vaut 0 : chaque terme est nul. Or M est à coefficients strictement positifs : on en déduit que pour tout $1 \leq k \leq n$, $b_k = 0$. Or B est stochastique : la somme $\sum_{k=1}^{n} b_k = 1$. Il y a contradiction et $\boxed{\forall 1 \leq j \leq n,\ b_j > 0.}$

27. Soit $P^{(0)}$ une distribution de probabilité quelconque.
La suite $(P^{(k)} = P^{(0)}M^k)_k$ converge donc vers $P^{(0)}B$. Calculons la $j$ième coordonnée de ce vecteur :
$(P^{(0)}B)_j = \sum_{k=1}^{n}(P^{(0)})_k B_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}(P^{(0)})_k b_j = b_j$ car $P^{(0)}$ est une distribution de probabilité.
On a donc $P^{(0)}B = P^\infty$ et $\boxed{(P^{(k)})_k \text{ converge vers } P^\infty}$ quelle que soit $P^{(0)}$.

28. Montrons que P^∞ est une distribution de probabilité invariante par M.
Dans la question 25, P^∞ est à coefficients positifs et la somme $\sum_{j=1}^{n} b_j = 1$ car B est stochastique.
De plus, dans la question 26, $P^\infty M = P^\infty$: on a l'invariance par M.
Enfin avec Q.20, cette distribution de probabilité invariante par M est bien unique.
$\boxed{P^\infty \text{ est l'unique distribution de probabilité invariante par } M.}$

III. Le graphe du web

29. Soit $1 \leq i, j \leq n$. Le coefficient $a_{i,j}$ désigne la probabilité de passer de la page i à la page j.
Si $i = j$, il y a 2 cas :
- soit la page i pointe vers une autre page et on ne reste pas à la page i donc $a_{i,i} = 0$.
- soit la page i ne pointe vers aucune page et on reste à la page i donc $a_{i,i} = 1$.

Si $i \neq j$, il y a 2 cas :
- soit la page i pointe vers la page j et comme il y a λ_i pages pointées par i de manière équiprobable, la probabilité de pointer vers j est donc $a_{i,j} = \dfrac{1}{\lambda_i}$.
- soit la page i ne pointe vers la page j et on reste à la page i donc $a_{i,j} = 0$.

On a donc le résultat annoncé.

On pourra remarquer que la matrice A est stochastique : ces coefficients sont positifs (mais pas strictement positifs) et la somme sur chaque ligne est égale à 1 : regardons la ligne i :

- soit la page i pointe vers une autre page et $a_{i,i} = 0$ et il y a λ_i termes sur la ligne i qui valent tous $\dfrac{1}{\lambda_i}$ et la somme donne 1.
- soit la page i ne pointe vers aucune page et $a_{i,j} = 1$ et tous les autres termes de le ligne i sont nuls : la somme donne 1 aussi.

On aurait aussi pu utiliser la question Q.13.

30. Les matrices A et $\dfrac{1}{n}J_n$ sont stochastiques donc avec la question Q.16, B est bien stochastique.
De plus, comme aucun coefficients de J_n n'est nul, B est à coefficients strictement positifs. En effet, $\forall\ 1 \leq i, j \leq n$
$$b_{i,j} = (1-\alpha)a_{i,j} + \alpha/n \geq \alpha/n > 0$$

31. Supposons que la page i ne contienne aucun lien avec une autre page :
La probabilité de quitter la page i est alors
$$1 - b_{i,i} = 1 - (1-\alpha)a_{i,i} - \alpha/n = 1 - (1-\alpha) - \alpha/n = \boxed{\alpha(1-1/n)}$$

32. D'après la question Q.30, les hypothèses de la partie II sont toutes vérifiées : la suite $(Q^{(k)})$ converge vers une distribution de probabilité Q^∞, invariante par B.
Notons μ_i (pertinence) la i-ième coordonnées de Q^∞ et vérifions les hypothèses (i) et (ii).
Par invariance par B de Q^∞, $Q^\infty = Q^\infty B$ donc $\forall\ 1 \leq i \leq n$,
$$\mu_i = \sum_{k=1}^{n} \mu_k[(1-\alpha)a_{k,i} + \frac{\alpha}{n}] = \sum_{k=1}^{n} \mu_k[(1-\alpha)a_{k,i}] + \frac{\alpha}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu_k = [(1-\alpha)a_{i,i}]\mu_i + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \mu_k[(1-\alpha)a_{k,i}] + \frac{\alpha}{n}$$
car Q^∞ est stochastique.

-Si la page i pointe vers d'autres pages : $a_{i,i} = 0$ et
$$\mu_i = (1-\alpha)\sum_{\substack{k\\k\to i}} \frac{1}{\lambda_k}\mu_k + \frac{\alpha}{n}$$

-Si la page i ne pointe pas vers d'autres pages : $a_{i,i} = 1$ et $\mu_i = (1-\alpha)\mu_i + (1-\alpha)\displaystyle\sum_{k,k\to i} \frac{1}{\lambda_k}\mu_k + \frac{\alpha}{n}$

donc
$$\mu_i = \frac{1-\alpha}{\alpha}\sum_{k,k\to i} \frac{1}{\lambda_k}\mu_k + \frac{\alpha}{n}$$
On voit que dans les 2 cas, on obtient une fonction décroissante en λ_k et croissante en μ_k :
$\boxed{\text{les conditions (i) et (ii) sont vérifiées en prenant pour } \mu_i \text{ , la i-ième coordonnées de } Q^\infty}$.

33. 34. et 35. Je laisse ces questions de Python à des collègues bien plus compétents que moi...