Banque d'épreuves E3A 2023

Épreuve de mathématiques, PSI, quatre heures

(corrigé)

Exercice 1

1. Pour que la famille $(p_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2}$ définisse bien la loi conjointe de deux variables aléatoires X et Y, encore faut-il que $p_{i,j}$ soit positif pour tout $(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2$, et que : $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2} p_{i,j}=1$. Calculons donc cette somme et regardons à quelle condition sur α elle vaut 1. On a :

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2} p_{i,j}=\alpha\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}=\alpha\sum_{i'=0}^{n}\binom{n}{i'}\sum_{j'=0}^{n}\binom{n}{j'},$$

et pour calculer ces deux sommes on utilise la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=(1+1)^n=2^n \tag{1}$$

donc finalement, quitte à renommer l'indice de sommation :

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2} p_{i,j}=\alpha\sum_{i'=0}^{n}\binom{n}{i'}2^n=\alpha(2^n)^2=\alpha 4^n.$$

On en déduit : $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2} p_{i,j}=1\iff\alpha=\frac{1}{4^n}$. Et pour cette valeur de α, on a bien $p_{i,j}\geqslant 0$ pour tout $(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2$. Ainsi $\alpha=\frac{1}{4^n}$ répond à la question posée.

2. Soit $i\in[\![1,n+1]\!]$. La famille $((Y=j))_{j\in[\![1,n+1]\!]}$ est un système complet d'évènements. Par la formule des probabilités totales, on a donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=i)=\sum_{j=1}^{n+1}\mathrm{P}\left((X=i)\cap(Y=j)\right)&=\frac{1}{4^n}\binom{n}{i-1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}\\&=\frac{1}{4^n}\binom{n}{i-1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\\&\overset{(1)}{=}\frac{1}{2^n}\binom{n}{i-1}.\end{aligned}$$

Le même raisonnement donne : $\forall j\in[\![1,n+1]\!]$, $\mathrm{P}(Y=j)=\dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{j-1}$.

3. Soit $(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2$. On a d'après la question précédente :

$$\mathrm{P}(X=i)\mathrm{P}(Y=j)=\frac{1}{2^n}\binom{n}{i-1}\times\frac{1}{2^n}\binom{n}{j-1}=\frac{1}{4^n}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}=\mathrm{P}((X=i)\cap(Y=j)).$$

Ceci montre que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

4. On a : $Z(\Omega)=[\![0,n]\!]$, et pour tout $k\in Z(\Omega)$ on a :

$$\mathrm{P}(Z=k)=\mathrm{P}(X=k+1)=\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}=\binom{n}{k}\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{n-k}}.$$

On reconnaît une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. On a donc : $\mathrm{E}(Z) = \frac{n}{2}$, et : $\mathrm{V}(Z) = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{4}$. Or : $X = Z + 1$, donc par linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Z) + 1 = \frac{n}{2} + 1,$$

et :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{V}(Z+1) = \mathrm{V}(Z) = \frac{n}{4}.$$

5. Soit $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$. Notons que la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}_{(X=j)}(X = i)$ existe bien car $\mathrm{P}(X = j) > 0$ pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$, d'après la loi de X trouvée à la question 2. Comme X et Y sont indépendantes, on a :

$$b_{i,j} = \mathrm{P}_{(X=j)}(Y = i) = \frac{\mathrm{P}(X = j \cap Y = i)}{\mathrm{P}(X = j)} = \frac{\mathrm{P}(X = j)\mathrm{P}(Y = i)}{\mathrm{P}(X = j)} = \mathrm{P}(Y = i).$$

6. On a, d'après la question précédente :

$$B = ((\mathrm{P}(Y = i)))_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(Y=1) & \mathrm{P}(Y=1) & \cdots & \mathrm{P}(Y=1) \\ \mathrm{P}(Y=2) & \mathrm{P}(Y=2) & \cdots & \mathrm{P}(Y=2) \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathrm{P}(Y=n+1) & \mathrm{P}(Y=n+1) & \cdots & \mathrm{P}(Y=n+1) \end{pmatrix}$$
$$\sim_C \begin{pmatrix} \mathrm{P}(Y=1) & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{P}(Y=2) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathrm{P}(Y=n+1) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (\forall j \in [\![2, n+1]\!],\ C_j \leftarrow C_j - C_1).$$

On en déduit que B est de rang 1 (la première colonne contient des probabilités non nulles, donc B n'est pas de rang nul). Cette même opération sur les colonnes montre que l'on a :

$$\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{P}(Y=1) \\ \mathrm{P}(Y=2) \\ \mathrm{P}(Y=3) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathrm{P}(Y=n+1) \end{pmatrix}\right), \quad \mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

7. Posons : $C = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(Y=1) \\ \mathrm{P}(Y=2) \\ \vdots \\ \mathrm{P}(Y=n+1) \end{pmatrix}$, et : $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. On a, d'après les règles basiques de calcul matriciel :

$$B = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(Y=1) & \mathrm{P}(Y=1) & \cdots & \mathrm{P}(Y=1) \\ \mathrm{P}(Y=2) & \mathrm{P}(Y=2) & \cdots & \mathrm{P}(Y=2) \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathrm{P}(Y=n+1) & \mathrm{P}(Y=n+1) & \cdots & \mathrm{P}(Y=n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(Y=1) \\ \mathrm{P}(Y=2) \\ \vdots \\ \mathrm{P}(Y=n+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire : $B = CL$.

8. On a, avec les notations de la question précédente : $B^2 = (CL)(CL) = C(LC)L$. Or :
$$LC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{P}(Y=1) \\ \mathrm{P}(Y=2) \\ \vdots \\ \mathrm{P}(Y=n+1) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{P}(Y=i) = \mathrm{tr}(B),$$
donc : $B^2 = C \cdot \mathrm{tr}(B) \cdot L = \mathrm{tr}(B)CL = \mathrm{tr}(B)B$ (en effet $\mathrm{tr}(B)$ est un réel et il commute donc avec L). D'où le résultat.
9. On reprend l'égalité de la question précédente. On a : $B^2 = \mathrm{tr}(B)B$. Mieux : comme la famille $((Y=i))_{i\in[\![1,n+1]\!]}$ est un système complet d'évènements, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{P}(Y=i) = 1$, donc : $\mathrm{tr}(B) = 1$, et on a simplement : $B^2 = B$. Autrement dit : $X^2 - X = X(X-1)$ est un polynôme annulateur de B. On en déduit d'une part que les valeurs propres de B sont parmi ses racines, c'est-à-dire : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) \subseteq \{0,1\}$, et d'autre part que B est diagonalisable par le critère de diagonalisation, puisqu'elle admet un polynôme annulateur scindé et à racines simples.
Pour achever la résolution de cette question, on se demande si réciproquement, 0 et 1 sont valeurs propres. La réponse est positive pour les deux, et il y a plusieurs façons de le démontrer : on peut par exemple noter que si a et b désignent respectivement les ordres de multiplicité de 0 et 1 comme valeurs propres de B (avec $a = 0$ si 0 si n'est pas valeur propre, et de même $b = 0$ si 1 n'est pas valeur propre), alors : $\mathrm{tr}(B) = 1 = 0 \times a + 1 \times b$, parce que la trace est la somme des valeurs propres comptées avec leurs ordres de multiplicité. Donc : $b = 1$, ce qui assure que 1 est valeur propre simple, et donc 0 doit être valeur propre d'ordre de multiplicité $(n+1) - 1 = n$ (la somme des ordres de multiplicités doit donner $\deg(\chi_B)$ si χ_B est scindé, et c'est bien le cas ici puisque B est diagonalisable). Ainsi 0 et 1 sont effectivement valeurs propres, donc :
$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{0,1\}.$$
Remarque. La matrice B est une matrice de projecteur. Cette observation aurait aussi pu être utilisée pour la diagonaliser.

Exercice 2

1. On a : $X^{n+1} - 1 = (X-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$. Par conséquent, lorsqu'on fait la division euclidienne de $X^{n+1} - 1$ par $X - 1$, le quotient vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$ et le reste est nul.
2. On a : $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, et la série entière associée diverge en tout point hors de cet intervalle ouvert.
3. **Étude d'une suite.**
   3.1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. L'application $t \mapsto \dfrac{1-t}{1-t^{n+1}}$ est continue (par morceaux) sur $[0,1[$ en tant que quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas, et pour tout t au voisinage de 1 on a :
$$\frac{1-t}{1-t^{n+1}} = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} t^k} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} 1} = \frac{1}{n+1}.$$
   On en déduit que $t \mapsto \dfrac{1-t}{1-t^{n+1}}$ se prolonge en une application continue sur le SEGMENT $[0,1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1-t^{n+1}}\mathrm{d}t$ converge. D'où le résultat.

3.2. Notons que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a aussi : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1-t^{n+1}} \mathrm{d}t$.

Nous allons déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$ avec le théorème de convergence dominée. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall t \in [0,1[, \quad f_n(t) = \frac{1-t}{1-t^{n+1}}.$$

Alors :

— pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'application f_n est continue par morceaux sur $[0,1[$;

— pour tout $t \in [0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} t^n = 0$, et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 1-t,$$

et on en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers $f : t \mapsto 1-t$, qui est aussi continue par morceaux sur $[0,1[$;

— pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $t \in [0,1[$, on a :

$$|f_n(t)| = \frac{1-t}{1-t^{n+1}} = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} t^k} \leqslant 1, \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

et l'application $\varphi : t \mapsto 1$ est trivialement continue par morceaux sur $[0,1[$, et même sur le segment $[0,1]$, donc elle y est intégrable.

Par le théorème de convergence dominée, on a d'une part l'intégrabilité de f et de f_n pour tout entier $n \geqslant 1$ (ce qu'on savait déjà), et d'autre part :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t = \left[\frac{(1-t)^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$

ce qu'on voulait démontrer : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge vers $\ell = \dfrac{1}{2}$.

4. **Étude de la série de terme général $u_n - \ell$.**

4.1. Soit $t \in [0,1]$. Si $t \neq 1$, alors la série $\sum\limits_{p\geqslant 1} g_p(t) = (1-t)\sum\limits_{p\geqslant 1}\left(t^{n+1}\right)^p$ est géométrique de raison $t^{n+1} \in [0,1[$, donc elle converge. Si $t = 1$, alors $\sum\limits_{p\geqslant 1} g_p(1) = \sum\limits_{p\geqslant 1} 0$ converge trivialement. On en déduit que $\sum\limits_{p\geqslant 1} g_p(t)$ converge pour tout $t \in [0,1]$, donc $\sum\limits_{p\geqslant 1} g_p$ converge simplement sur $[0,1]$. On a par ailleurs, si $t = 1$:

$$\sum_{p=1}^{+\infty} g_p(1) = \sum_{p=1}^{+\infty} 0 = 0,$$

et si $t \neq 1$:

$$\sum_{p=1}^{+\infty} g_p(t) = (1-t)\sum_{p=1}^{+\infty}\left(t^{n+1}\right)^p = (1-t)\frac{t^{n+1}}{1-t^{n+1}}.$$

En résumé :

$$\forall t \in [0,1], \quad \sum_{p=1}^{+\infty} g_p(t) = \begin{cases} t^{n+1}\dfrac{1-t}{1-t^{n+1}} & \text{si } t \neq 1, \\ 0 & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Remarque. La fonction $\sum_{p=1}^{+\infty} g_p$ n'est pas continue en 1, puisque : $\lim_{t\to 1^-} t^{n+1}\frac{1-t}{1-t^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \neq 0$. On en déduit, même si ce n'est pas demandé, que la série de fonctions $\sum_{p\geqslant 1} g_p$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

4.2. Soit $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On a :

$$\int_0^1 g_p(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(t^{(n+1)p} - t^{(n+1)p+1}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{(n+1)p+1}}{(n+1)p+1} - \frac{t^{(n+1)p+2}}{(n+1)p+2}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{(n+1)p+1} - \frac{1}{(n+1)p+2},$$

et on en déduit :

$$\int_0^1 g_p(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{((n+1)p+1)((n+1)p+2)} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)^2 p^2}.$$

4.3. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On a :

$$u_n - \frac{1}{2} = \int_0^1 \frac{1-t}{1-t^{n+1}}\mathrm{d}t - \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)\left(\frac{1}{1-t^{n+1}} - 1\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)\frac{t^{n+1}}{1-t^{n+1}}\mathrm{d}t.$$

D'après le calcul effectué dans la question 4.1, on a donc :

$$u_n - \frac{1}{2} = \int_0^1 \sum_{p=1}^{+\infty} g_p(t)\mathrm{d}t.$$

Justifions qu'on peut permuter l'intégrale et la somme. Nous allons utiliser le théorème d'intégration terme à terme. Vérifions ses hypothèses :

— pour tout $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, l'application $g_p : t \mapsto (1-t)t^{(n+1)p}$ est continue par morceaux sur le segment $[0,1]$, donc elle y est intégrable ;

— la série $\sum_{p\geqslant 1} g_p$ converge simplement sur $[0,1]$, comme on l'a justifié dans la question 4.1, et sa somme $t \mapsto \begin{cases} t^{n+1}\dfrac{1-t}{1-t^{n+1}} & \text{si } t \neq 1 \\ 0 & \text{si } t = 1 \end{cases}$ est manifestement continue par morceaux sur $[0,1]$;

— la série $\sum_{p\geqslant 1} \int_0^1 |g_p(t)|\mathrm{d}t$ converge, puisque l'on a, pour tout p au voisinage de $+\infty$:

$$\int_0^1 |g_p(t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 g_p(t)\mathrm{d}t \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)^2}\cdot\frac{1}{p^2}\,; \qquad \text{(q. 4.2)}$$

et la série de Riemann $\sum_{p\geqslant 1}\frac{1}{p^2}$ converge car son exposant est $2 > 1$; par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{p\geqslant 1}\int_0^1 |g_p(t)|\mathrm{d}t$ converge aussi.

Les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme étant vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $\sum_{p=1}^{+\infty} h_p$ est intégrable sur $[0,1]$, et d'autre part que :

$$u_n - \frac{1}{2} = \int_0^1 \sum_{p=1}^{+\infty} g_p(t)\mathrm{d}t = \sum_{p=1}^{+\infty}\int_0^1 g_p(t)\mathrm{d}t \overset{\text{(q. 4.2)}}{=} \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{((n+1)p+2)((n+1)p+1)},$$

d'où le résultat.

4.4. Pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$|h_p(t)| = h_p(t) \leqslant \frac{t^2}{((t+1)p)^2} \leqslant \frac{(t+1)^2}{(t+1)^2p^2} = \frac{1}{p^2}.$$

Cette majoration est indépendante de t. Par propriété de la borne supérieure :

$$\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \|h_p\|_\infty \leqslant \frac{1}{p^2}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{p\geqslant 1} \frac{1}{p^2}$ converge car son exposant est $2 > 1$. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de fonctions $\sum_{p\geqslant 1} h_p$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$: d'où le résultat.

4.5. Soit n au voisinage de $+\infty$. Avec les notations de la question précédente, on a :

$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{p=1}^{+\infty} h_p(n+1).$$

Or la série de fonctions $\sum_{p\geqslant 1} h_p$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on montre facilement qu'on a : $\lim_{t\to+\infty} h_p(t) = \frac{1}{p^2} \in \mathbb{R}$. Donc, par le théorème de la double limite : $\lim_{t\to+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} h_p(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \lim_{t\to+\infty} h_p(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (cette dernière égalité utilise le résultat admis). De même, quand $n \to +\infty$, on a $n+1 \to +\infty$, donc par composition de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} h_p(n+1) = \frac{\pi^2}{6}.$$

On en déduit :

$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{p=1}^{+\infty} h_p(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\pi^2}{6},$$

c'est-à-dire :

$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{6n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

d'où :

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 3

1. **Quelques exemples.**

1.1. Soit $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R})$. Alors A est de type 0 si et seulement si $A^\top = A^0 = \mathrm{I}_p$, si et seulement si $A = \mathrm{I}_p^\top = \mathrm{I}_p$. Donc l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$ de type 0 est $\{\mathrm{I}_p\}$.

1.2. Soit $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R})$. Alors A est de type 1 si et seulement si $A^\top = A$, si et seulement si A est symétrique. Donc l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$ de type 1 est : $\mathrm{S}_p(\mathbb{R})$.

1.3. Soit $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R})$. Alors A est de type -1 si et seulement si $A^\top = A^{-1}$, si et seulement si A est une matrice orthogonale. Donc l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$ de type 1 est : $\mathrm{O}_p(\mathbb{R})$. Pour $p = 4$, un exemple de telle matrice est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

comme on le constate en vérifiant que les colonnes forment une base orthonormée de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel.

2. 2.1. Montrons : $\forall m \in \mathbb{N}$, $(A(\theta))^m = A(m\theta)$, en raisonnant par récurrence sur m. Si $m = 0$, alors on a : $A(0 \cdot \theta) = A(0) = \mathrm{I}_3$ (car $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$), et : $(A(\theta))^0 = \mathrm{I}_3$, donc on a bien : $(A(\theta))^0 = A(0 \cdot \theta)$. L'égalité est vraie au rang $m = 0$.

Passons à l'hérédité. Soit $m \in \mathbb{N}$. On suppose : $(A(\theta))^m = A(m\theta)$. Alors :

$$\begin{aligned}
(A(\theta))^{m+1} &= (A(\theta))^m \cdot A(\theta) \\
&= A(m\theta)A(\theta) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(m\theta) & -\sin(m\theta) \\ 0 & \sin(m\theta) & \cos(m\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(m\theta)\cos(\theta) - \sin(m\theta)\sin(\theta) & -\sin(\theta)\cos(m\theta) - \sin(m\theta)\cos(\theta) \\ 0 & \sin(m\theta)\cos(\theta) + \cos(m\theta)\sin(\theta) & -\sin(m\theta)\sin(\theta) + \cos(m\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos((m+1)\theta) & -\sin((m+1)\theta) \\ 0 & \sin((m+1)\theta) & \cos((m+1)\theta) \end{pmatrix} \\
&= A((m+1)\theta),
\end{aligned}$$

donc le résultat au rang m implique bien le résultat au rang $m+1$: d'où l'hérédité.

Par principe de récurrence, on a montré : $\forall m \in \mathbb{N}$, $(A(\theta))^m = A(m\theta)$.

2.2. Pour traiter à bien cette question, notons d'une part que pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, on a : $A(\theta) = A(\theta') \iff \theta \equiv \theta' \bmod 2\pi$, et d'autre part que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a : $A(\theta)^\top = A(-\theta)$. Ces deux observations sont faciles à démontrer et sont laissées au lecteur.

Ceci étant dit : soit $\theta \in \mathbb{R}$. On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que $A(\theta)$ soit de type n. On a, d'après les deux observations ci-dessus et la question précédente :

$$A(\theta)^\top = A(\theta)^n \iff A(-\theta) = A(n\theta) \iff -\theta \equiv n\theta \bmod 2\pi \iff (n-1)\theta \equiv 0 \bmod 2\pi,$$

si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $(n-1)\theta = 2\pi k$. On en déduit :

$$A(\theta) \text{ de type } n \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{2\pi k}{n-1},$$

la division étant licite parce que $n \geqslant 2$ par hypothèse. L'ensemble demandé est donc :

$$\left\{ \frac{2\pi k}{n-1} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3. 3.1. On a, pour toute matrice : $\left(A^\top\right)^\top = A$. Or A est de type n, donc : $\left(A^\top\right)^\top = (A^n)^\top$. De plus on démontre aisément par récurrence, grâce à la formule $(MN)^\top = N^\top M^\top$ rappelée dans l'énoncé, que l'on a : $(A^n)^\top = (A^\top)^n$. Donc finalement :

$$A = \left(A^\top\right)^\top = (A^n)^\top = \left(A^\top\right)^n = (A^n)^n = A^{n \cdot n} = A^{n^2},$$

d'où le résultat.

3.2 3.2.1. On a : $B^n = A^{(n+1)n} = A^{n^2+n} = A^{n^2}A^n = A \cdot A^n = A^{1+n} = B$. D'où le résultat.

3.2.2. On rappelle que l'on a : $B = A^{n+1} = A^n A$, et comme A est de type n on a : $A^n = A^\top$, donc :

$$B = A^\top A. \tag{2}$$

On en déduit, grâce à la relation $(MN)^\top = N^\top M^\top$ avec $M = A^\top$ et $N = A$:

$$B^\top = \left(A^\top A\right)^\top = A^\top \left(A^\top\right)^\top = A^\top A = B,$$

donc B est symétrique.

3.2.3. Tout d'abord, comme B est symétrique réelle, par le théorème spectral B est diagonalisable, et donc χ_B est scindé sur $\mathbb{R}$ en particulier. On en déduit que toutes les valeurs propres de B sont réelles.

Montrons qu'elles sont positives ou nulles. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de B, et soit X un vecteur propre de B associé à λ. On a : $X^\top BX = X^\top(\lambda X) = \lambda X^\top X = \lambda\|X\|^2$. Comme X est non nul en tant que vecteur propre, on a : $\|X\|^2 > 0$, et on peut donc diviser cette égalité par $\|X\|^2$ pour obtenir :

$$\lambda = \frac{X^\top BX}{\|X\|^2}.$$

Le dénominateur est positif ; justifions que le numérateur l'est également. Comme on l'a justifié dans la question précédente, on a : $B = A^\top A$. Donc : $X^\top BX = X^\top A^\top AX = (AX)^\top AX = \|AX\|^2 \geqslant 0$. Donc finalement :

$$\lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \geqslant 0,$$

d'où le résultat : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B)$, $\lambda \geqslant 0$.

3.2.4. Comme $B^n = B$, le polynôme $X^n - X$ est un polynôme annulateur de B. Les valeurs propres de B sont donc parmi les racines réelles de $X^n - X$. Or, si $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x^n - x \iff x(x^{n-1} - 1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou : } x^{n-1} = 1 \iff x = 0 \text{ ou : } x = 1.$$

On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) \subseteq \{0, 1\}$. On va montrer que l'inclusion réciproque est vraie (la démonstration que l'on va fournir ici aurait aussi fonctionné dans l'exercice 1, question 9). Comme B est diagonalisable, χ_B est scindé sur $\mathbb{R}$ et admet donc au moins une racine réelle. Ainsi B admet au moins une valeur propre réelle, qui est 0 ou 1. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'une des deux ne soit pas valeur propre de B : alors B n'en aurait qu'une seule. Soit $\lambda \in \{0, 1\}$ l'unique valeur propre de B. Comme B est diagonalisable, il existe $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $B = PDP^{-1}$. De plus les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de B, donc sous l'hypothèse que λ est l'unique valeur propre de B, cela donne : $B = P(\lambda \mathrm{I}_p)P^{-1} = \lambda PP^{-1} = \lambda \mathrm{I}_p$. Mais c'est impossible, puisque B est supposée différente de $\lambda \mathrm{I}_p$ pour $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.

Par l'absurde : 0 et 1 sont valeurs propres de B, c'est-à-dire : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{0, 1\}$.

3.2.5. Comme B est diagonalisable, par le critère polynomial de diagonalisation le polynôme $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B)} (X - \lambda) = X(X-1) = X^2 - X$ est un polynôme annulateur de B. Donc : $B^2 - B = 0_{\mathrm{M}_p(\mathbb{R})}$, ce qui donne bien : $B^2 = B$, donc B est une matrice de projection. Comme elle est de plus symétrique, c'est une matrice de projection orthogonale, sur $\mathrm{Im}(B)$ et parallèlement à $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Im}(B)^\perp$. Je ne sais pas quelle réponse plus précise semble attendre l'énoncé.

Remarque. Une autre démonstration que B est une matrice de projection est possible, en écrivant que $B = PDP^{-1}$ avec P inversible et D une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de B, c'est-à-dire 0 et 1. Comme $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$, on en déduit aisément que $D^2 = D$, et donc : $B^2 = PD^2P^{-1} = PDP^{-1} = B$. Mais c'est au fond la même démonstration que celle ci-dessus.

3.3. Soit $X \in \mathrm{Ker}(A)$. Alors : $AX = 0_{\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$, et donc :

$$BX \overset{(2)}{=} A^\top AX = A^\top \times 0_{\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})}.$$

D'où : $\mathrm{Ker}(A) \subseteq \mathrm{Ker}(B)$. Réciproquement, soit $X \in \ker(B)$. Alors $BX = 0_{\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$, c'est-à-dire : $A^\top AX = 0_{\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$. En multipliant à gauche par $X^\top$, on obtient : $X^\top A^\top AX = 0$. Or le membre de gauche est égal à : $(AX)^\top AX = \|AX\|^2$, donc finalement on a montré que si $X \in \ker(B)$, alors : $\|AX\|^2 = 0$. Par propriété de séparation de la norme, ce n'est possible que si $AX = 0_{\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$, c'est-à-dire : $X \in \mathrm{Ker}(A)$. D'où : $\mathrm{Ker}(B) \subseteq \mathrm{Ker}(A)$.
Ayant démontré la double inclusion, on a : $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Ker}(A)$.

3.4. Nous allons montrer : $\mathrm{Im}(B) \subseteq \mathrm{Im}(A)$, et conclure avec un argument dimensionnel. Soit $Y \in \mathrm{Im}(B)$. Par définition de l'image de B, il existe $X \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que : $Y = BX$. Or : $B = A^{n+1} = A \cdot A^n = AA^\top$, donc : $Y = A(A^\top X) \in \mathrm{Im}(A)$. D'où : $\mathrm{Im}(B) \subseteq \mathrm{Im}(A)$. Pour en déduire qu'ils sont égaux, il suffit à présent de démontrer qu'ils sont de même dimension. Or d'après la question précédente on a : $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Ker}(A)$, donc d'après le théorème du rang (utilisé avec B, puis avec A) on a :

$$\dim(\mathrm{Im}(B)) = p - \dim(\mathrm{Ker}(B)) = p - \dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dim(\mathrm{Im}(A)).$$

Ainsi les deux sous-espaces sont inclus l'un dans l'autre et ont même dimension, donc : $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Im}(A)$. D'où le résultat.

3.5. Comme B est symétrique réelle, on sait que l'on a : $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Ker}(B)^\perp$. Donc, d'après les deux questions précédentes : $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Ker}(A)^\perp$. D'où le résultat.

3.6. Soit $X \in \mathrm{Im}(A)$. On a :

$$\|AX\|^2 = (AX)^\top(AX) = X^\top A^\top AX \overset{(2)}{=} X^\top BX,$$

or $X \in \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$ et B est une matrice de projection, donc $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Ker}(B - \mathrm{I}_p)$; autrement dit : $BX = X$. Donc :

$$\|AX\|^2 = X^\top X = \|X\|^2,$$

d'où le résultat en prenant la racine carrée.

3.7. Si A est inversible, alors B l'est également, étant donné que : $\det(B) = \det(A)^{n+1} \neq 0$ (on peut aussi utiliser la question 3.3). En multipliant l'égalité $B^2 = B$ (qui provient de la question 3.2.5) par B^{-1}, on obtient : $B = \mathrm{I}_p$. C'est-à-dire : $A^{n+1} = \mathrm{I}_p$. En multipliant par A^{-1} cette égalité, on obtient : $A^n = A^{-1}$.
Déduisons-en le résultat demandé : comme A est de type n, on a : $A^\top = A^n$. D'après ce qu'on vient de montrer, ceci implique : $A^\top = A^{-1}$. Ainsi A est de type -1, d'où le résultat.

4. Supposons : $A^\top = A^n = A^{n+1}$. On veut montrer que A est une matrice de projecteur orthogonal. Pour cela, il faut et il suffit d'avoir : $A^2 = A$, et : $A^\top = A$.
On remarque que sous ces hypothèses, on a : $B = A^{n+1} = A^\top$. Or il fut démontré à la question 3.2.5 que B est une matrice de projection orthogonale. Cela équivaut exactement à : $B^\top = B$, et : $B^2 = B$. Puisque $B = A^\top$, la première égalité donne : $(A^\top)^\top = A^\top$, c'est-à-dire : $A^\top = A$. La seconde égalité donne : $(A^\top)^2 = A^\top$, mais comme on vient de le voir on a : $A^\top = A$, donc cette égalité devient plus simplement : $A^2 = A$.
Ainsi on a bien montré : $A^2 = A$, et : $A^\top = A$, donc A est une matrice de projection orthogonale. D'où le résultat.

Exercice 4

1. Pour tout réel θ, le module et un argument de $e^{i\theta}$ sont respectivement 1 et θ.
2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$\sin(n\pi + t) = \operatorname{Im}\left(e^{i(n\pi+t)}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{in\pi}e^{it}\right) = \operatorname{Im}\left(\left(e^{i\pi}\right)^n e^{it}\right) = \operatorname{Im}\left((-1)^n e^{it}\right) = (-1)^n \operatorname{Im}\left(e^{it}\right) = (-1)^n \sin(t),$$

d'où le résultat. Un raisonnement par récurrence fonctionne également.

3. 3.1. Notons que a_n est positif pour tout entier naturel n. En effet, soit $n \in \mathbb{N}$. L'hypothèse de décroissance assure que pour tout $p \geqslant n$, on a : $a_n \geqslant a_p$. Quand $p \to +\infty$, cette inégalité donne : $a_n \geqslant 0$.

   Ainsi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, décroissante et de limite nulle, donc la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ converge par le théorème spécial des séries alternées.

   3.2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Si $p = 0$ alors il s'agit de la même série que dans la question précédente, et si $p > 0$ alors on a pour tout N assez grand :

$$\sum_{n=p}^{N}(-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{p-1}(-1)^n a_n.$$

   On sait que la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$ converge (et sa limite est $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$), et la seconde quantité du membre de droite ne dépend pas de N. Autrement dit : c'est une constante, donc elle a bien une limite finie quand $N \to +\infty$. Donc la série $\sum_{n\geqslant p}(-1)^n a_n$ converge en tant que différence de deux suites convergentes, et quand $N \to +\infty$, on obtient :

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=p}^{N}(-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{p-1}(-1)^n a_n.$$

   3.3. Pour tout $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on remarque que T_p est le reste d'indice $p-1$ de la série convergente $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$, donc $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   3.4. D'après le théorème spécial des séries alternées, le reste d'une série vérifiant ses hypothèses est de même signe que son premier terme. Autrement dit : pour tout $p \in \mathbb{N}$, T_p est du signe de $(-1)^p a_p$. Comme on a démontré que a_n est positif pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de T_p ne dépend que de $(-1)^p$. Ainsi : si p est pair alors T_p est positif, et si p est impair alors T_p est négatif, d'où le résultat.

4. Notons F l'unique primitive de f s'annulant en 0 (cette fonction F n'a rien à voir avec celle introduite par l'énoncé dans la question suivante, attention). On a, par le théorème fondamental de l'analyse :

$$\forall x > 0, \quad \int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t = F(\sqrt{x}).$$

   Or l'application $\sqrt{\cdot}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, tandis que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de la fonction continue f. Par composition, $x \mapsto F(\sqrt{x})$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui démontre la première partie de la question. Sa dérivée est :

$$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}F'(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}f(\sqrt{x}),$$

   d'où le résultat.

5. 5.1. Nous allons utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. Posons :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1], \quad g(x,t) = \frac{e^{ix(1+t^2)}}{1+t^2}.$$

Alors :

— pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto g(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $[0,1]$ en tant que composition et quotient de fonctions usuellement continues (dont le dénominateur ne s'annule pas) ; puisqu'elle est continue par morceaux sur un segment, elle y est aussi intégrable ;

— pour tout $t \in [0,1]$, l'application $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1], \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = i(1+t^2) \cdot \frac{e^{ix(1+t^2)}}{1+t^2} = ie^{ix(1+t^2)},$$

— pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,1]$ par continuité de l'exponentielle et de l'application polynomiale $t \mapsto 1+t^2$;

— pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$, on a :

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = |i| \cdot \left|e^{ix(1+t^2)}\right| = 1 \leqslant 1 \quad (\textsc{hypothèse de domination})$$

et l'application $\varphi : t \mapsto 1$ est évidemment continue par morceaux sur $[0,1]$, qui est un segment, donc elle y est intégrable aussi.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, d'une part l'application $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $[0,1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (ce qui était trivial), et d'autre part l'application $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 g(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On a de plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = i\int_0^1 e^{ix(1+t^2)}\mathrm{d}t.$$

5.2. Soit $x > 0$. On a montré dans la question précédente :

$$F'(x) = i\int_0^1 e^{ix(1+t^2)}\mathrm{d}t = ie^{ix}\int_0^1 e^{ixt^2}\mathrm{d}t.$$

Faisons le changement de variable $u = \sqrt{x}t$ dans cette intégrale. On a alors : $\mathrm{d}u = \sqrt{x}\mathrm{d}t$, et donc :

$$F'(x) = \frac{ie^{ix}}{\sqrt{x}}\int_0^1 e^{i(\sqrt{x}t)^2}(\sqrt{x}\mathrm{d}t) = \frac{ie^{ix}}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2}\mathrm{d}u,$$

d'où le résultat.

6. **Convergence d'intégrales.**

6.1. L'application $u \mapsto e^{iu}$ est usuellement continue sur $[0,\pi]$, donc $u \mapsto \dfrac{e^{iu}}{\sqrt{u}}$ l'est sur $]0,\pi]$. De plus on a :

$$\forall u \in]0,\pi], \quad \left|\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\right| = \frac{1}{\sqrt{u}}.$$

On reconnaît une fonction de Riemann d'exposant $\dfrac{1}{2} < 1$, dont on sait qu'elle est intégrable au voisinage de 0. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge absolument donc converge. En prenant les parties réelle et imaginaire, on en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ convergent.

6.2. L'application $u \mapsto \dfrac{e^{iu}}{\sqrt{u}}$ est continue (par morceaux) sur $[\pi, +\infty[$. Pour montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$, on intègre par parties :

— en dérivant $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}}$, qui est de classe C^1 sur $[\pi, +\infty[$ et de dérivée $u \mapsto -\dfrac{1}{2u^{3/2}}$;

— en intégrant $u \mapsto e^{iu}$, qui est continue sur $[\pi, +\infty[$ et dont une primitive est $u \mapsto \dfrac{e^{iu}}{i} = -ie^{iu}$.

Vérifions l'existence du terme entre crochets $\left[-\dfrac{ie^{iu}}{\sqrt{u}}\right]_\pi^{+\infty}$. Il n'y a aucune complication en π. Étudions la limite quand $u \to +\infty$ de $-\dfrac{ie^{iu}}{\sqrt{u}}$. On a :

$$\forall u \geqslant \pi, \quad \left|-\frac{ie^{iu}}{\sqrt{u}}\right| = \frac{1}{\sqrt{u}} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc : $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} -\frac{ie^{iu}}{\sqrt{u}} = 0$. Ainsi le terme entre crochets existe bien. Par la formule de l'intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{ie^{iu}}{2u^{3/2}}\mathrm{d}u$ sont donc de même nature. Étudions la seconde intégrale. L'application $u \mapsto \dfrac{ie^{iu}}{2u^{3/2}}$ est continue (par morceaux) sur $[\pi, +\infty[$, et on a : $\forall u \geqslant \pi$, $\left|\dfrac{ie^{iu}}{2u^{3/2}}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^{3/2}}$. On reconnaît une fonction de Riemann d'exposant $\frac{3}{2} > 1$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \left|\frac{ie^{iu}}{2u^{3/2}}\right|\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_\pi^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{3/2}}$ converge. Comme la convergence absolue implique la convergence, l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{ie^{iu}}{2u^{3/2}}\mathrm{d}u$ converge, et donc l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ également d'après ce qui a été justifié tantôt : d'où le résultat.

6.3. La question 6.1 démontre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge, et la question précédente que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge. Par définition d'une intégrale impropre sur un intervalle ouvert, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge.

6.4. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge d'après la question précédente. Faisons le changement de variable : $v = \sqrt{u}$. Il est licite parce que l'application $\sqrt{\cdot}$ est de classe C^1 et strictement croissante sur l'intervalle d'intégration $]0, +\infty[$. On a : $\mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}$. La formule du changement de variable conserve la nature des intégrales, et on en déduit que l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{i(\sqrt{u})^2} 2\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = 2\int_0^{+\infty} e^{iv^2}\mathrm{d}v$$

converge, d'où le résultat après division par 2.

7. 7.1. Pour $n = 0$, l'existence de $w_0 = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ découle de la question 6.1. Pour $n \geqslant 1$, il suffit de dire que l'application $u \mapsto \dfrac{\sin(u)}{\sqrt{u}}$ est continue sur le segment $[n\pi, (n+1)\pi]$ en

tant que quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, donc $w_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ converge. Ainsi w_n existe pour tout entier naturel n.

7.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On fait le changement de variable indiqué. On obtient :

$$w_n = \int_0^\pi \frac{\sin(t+n\pi)}{\sqrt{t+n\pi}}\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{\sqrt{t+n\pi}}\mathrm{d}t,$$

donc : $\alpha_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{\sqrt{t+n\pi}}\mathrm{d}t$. La fonction sinus est positive sur $[0,\pi]$, tout comme la racine carrée. On en déduit que $u \mapsto \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t+n\pi}}$ est positive sur $]0,\pi]$, et de plus elle est continue et non identiquement nulle (puisqu'en $\frac{\pi}{2}$ on a $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0$). Donc, par croissance et propriété de séparation de l'intégrale : $\alpha_n > 0$. D'où le résultat.

7.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a, en utilisant le changement de variable de la question précédente :

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \int_0^\pi \underbrace{\sin(t)}_{\geqslant 0} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{t+(n+1)\pi}} - \frac{1}{\sqrt{t+n\pi}}\right)}_{\leqslant 0} \mathrm{d}t \leqslant 0$$

par croissance de l'intégrale. D'où le résultat : $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (on a utilisé la décroissance de l'application $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ pour obtenir le signe du terme en facteur de $\sin(t)$).

7.4. Nous allons utiliser le théorème spécial des séries alternées. Pour cela, il reste à vérifier que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Or on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant \alpha_n \leqslant \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{t+n\pi}}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 0. Donc, par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$. Ainsi $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels décroissante et de limite nulle, donc par la question 3.1 cela suffit à démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n = \sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n \alpha_n$ converge, et d'après la question 3.3 sa somme est positive. D'où le résultat.

7.5. Soit $N \in \mathbb{N}$. Par la relation de Chasles, on a :

$$\sum_{n=0}^N w_n = \sum_{n=0}^N \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \int_0^{(N+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u.$$

Quand $N \to +\infty$, chaque membre de cette égalité a une limite finie d'après les questions 6.3 et 7.4. On a donc, en prenant la limite :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u.$$

8. Posons : $\forall x \geqslant 0,\ G(x) = \dfrac{\pi}{4} + i\left(\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2}\mathrm{d}u\right)^2$. On veut montrer : $\forall x \geqslant 0,\ F(x) = G(x)$. Pour cela, dérivons G. La question 4, appliquée à la fonction $f : t \mapsto e^{it^2}$, montre que la dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2}\mathrm{d}u$ est $x \mapsto \dfrac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = \dfrac{e^{ix}}{2\sqrt{x}}$. Par conséquent la dérivée de $x \mapsto \left(\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2}\mathrm{d}u\right)^2$

sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto 2 \cdot \int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2}\mathrm{d}u \cdot \frac{e^{ix}}{2\sqrt{x}}$. On en déduit que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'on a :

$$\forall x > 0, \quad G'(x) = i \int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2}\mathrm{d}u \cdot \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}} \overset{(q.\,5.2)}{=} F'(x).$$

Deux fonctions sont les dérivées sont égales sur un intervalle sont égales à une constante près. Soit, donc, $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x > 0$, $F(x) = G(x) + c$. Par continuité de F et G en 0 (pour F cela découle de la classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et pour G cela découle de la continuité de $x \mapsto \int_0^x e^{iu^2}\mathrm{d}u$, par le théorème fondamental de l'analyse, et de $\sqrt{\cdot}$), quand $x \to 0^+$ cette égalité donne : $F(0) = G(0)+c$ (en particulier l'égalité est valable pour tout $x \geqslant 0$). Or : $G(0) = \frac{\pi}{4}$, et :

$$F(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

donc : $c = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$. On a finalement, pour tout x réel positif :

$$F(x) = G(x) = \frac{\pi}{4} + i\left(\int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2}\mathrm{d}u\right)^2,$$

d'où le résultat.

9. Si l'on utilise le résultat admis, prendre la limite quand $x \to +\infty$ dans l'égalité de la question précédente donne : $0 = \frac{\pi}{4} + i\left(\int_0^{+\infty} e^{iu^2}\mathrm{d}u\right)^2$. On en déduit :

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{iu^2}\mathrm{d}u\right)^2 = -\frac{\pi}{4i} = \frac{\pi}{4}i = \frac{\pi}{4}e^{\frac{i\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2.$$

Le nombre complexe $\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2$ admet pour racines carrées $e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $-e^{i\frac{\pi}{4}}$. On en déduit qu'il existe $\varepsilon \in \{1, -1\}$ tel que :

$$\int_0^{+\infty} e^{iu^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \varepsilon e^{i\frac{\pi}{4}} = \varepsilon\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \varepsilon\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + i\varepsilon\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire, on a donc :

$$\int_0^{+\infty} \cos\left(u^2\right)\mathrm{d}u = \varepsilon\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad \int_0^{+\infty} \sin\left(u^2\right)\mathrm{d}u = \varepsilon\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Il reste à déterminer si $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$. Pour cela, on note que grâce au changement de variable $v = u^2$, déjà utilisé dans la question 6.4 (on ne détaille donc pas le raisonnement), on a :

$$\int_0^{+\infty} \sin\left(u^2\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(v)}{\sqrt{v}}\mathrm{d}v \overset{(q.\,7.5)}{=} \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} w_n,$$

et on a vu dans la question 7.4 que cette somme est positive. D'où : $\int_0^{+\infty} \sin\left(u^2\right)\mathrm{d}u \geqslant 0$, ce qui impose : $\varepsilon = 1$. Finalement on a bien :

$$\int_0^{+\infty} \cos\left(u^2\right)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \sin\left(u^2\right)\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}},$$

d'où le résultat.