Planche 11

1. Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne une permutation des entiers de 0 à $n-1$.

Pour cela, on crée une liste des entiers de 0 à $n-1$. On rappelle que `rd.randint(a,b)` *renvoie aléatoirement un entier dans l'intervalle $[\![a, b-1]\!]$, et que* `L.pop(4)` *par exemple modifie la liste* `L` *en supprimant l'élément d'indice 4, et renvoie cet élément. Le programme se termine lorsque la liste initiale est vide.*

2. 20 amis apportent chacun un cadeau bien empaqueté, tous de même taille et de même couleur. Les différents paquets sont redistribués aléatoirement entre les différents amis. Grâce à la fonction écrite ci-dessus, écrire un nouveau programme qui évalue l'espérance et la variance du nombre de personnes qui repartent avec leur propre cadeau. Calculer aussi une valeur approchée de la probabilité qu'aucune des 20 personnes ne reparte avec son propre cadeau.

3. Soit $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'intervalle entier $[\![0, n-1]\!]$, muni de la probabilité uniforme. Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, on note Y_j la variable aléatoire sur $\mathcal{S}_n$ telle que $Y_j(f) = 1$ si $f(j) = j$, et $Y_j(f) = 0$ sinon. On note X_n la variable aléatoire sur $\mathcal{S}_n$ telle que $X_n(f) = \text{Card}\left\{j \in [\![0, n-1]\!] \mid f(j) = j\right\}$, i.e. $X_n(f)$ est le nombre de points fixes de la permutation f.

a. Donner la loi de Y_j. Exprimer X_n à l'aide des Y_j, $0 \leq j \leq n-1$.

b. Calculer $\text{E}(X_n)$ et $\text{V}(X_n)$. Faire le lien avec la question **2.**

4. *On admettra dans cette question la* **formule d'inversion de Pascal**: *Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles. Si on a* **(H):** $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$, *alors on a*

$$(\mathbf{C}): \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k \, .$$

Une permutation $f \in \mathcal{S}_n$ est appelée un **dérangement** si elle n'a aucun point fixe. On note d_n le nombre de dérangements dans $\mathcal{S}_n$.

a. Montrer que $P(X_n = k) = \displaystyle\binom{n}{k} \frac{d_{n-k}}{n!}$. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = n!$

b. Exprimer d_n sous forme de somme.

c. Que vaut $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{d_n}{n!}$?

5. Montrer la **formule d'inversion de Pascal**.

- -

1. Commentaire du script: on crée une liste `l` des entiers de 0 à $n-1$, et on en retire successivement tous les éléments dans un ordre aléatoire pour aller les placer dans une nouvelle liste `m`. On retourne alors cette nouvelle liste `m` qui contient donc tous les entiers de 0 à $n-1$ mais dans un ordre aléatoire.

2. On répète 1000 fois l'expérience aléatoire qui consiste à permuter 20 éléments, en notant à chaque fois le nombre de points fixes de la permutation. La variable `npf` (en minuscules) récupère le nombre de points fixes de la permutation que l'on vient de créer. La variable `NPF` (en majuscules), une fois la simulation terminée, contient la liste de toutes les valeurs de `npf` pour les 1000 permutations créées.

Dans un deuxième temps, on analyse la liste `NPF`. La moyenne `moy` de ses éléments ("moyenne observée") donne une estimation de l'espérance ("moyenne théorique") du nombre de points fixes d'une permutation quelconque de $\mathcal{S}_n$. En vertu de la formule de Koenig-Huygens $\text{V}(X) = \text{E}(X^2) - \text{E}(X)^2$, en retranchant le carré de la moyenne des valeurs de `npf` à la moyenne des carrés, notée `moycarres`, on aura une bonne estimation de la variance.

3. On obtient $\mathrm{E}(X_n) = 1$ et $\mathrm{V}(X_n) = 1$, *cf.* planche CCMP 4, exo 1.

4.a. On sait que $\mathrm{Card}(\mathcal{S}_n) = n!$ Pour dénombrer les permutations dans $\mathcal{S}_n$ qui admettent exactement k points fixes, on commence par choisir l'ensemble de ses k points fixes, il y a pour cela $\binom{n}{k}$ choix possibles, ensuite on choisit un dérangement des $n-k$ éléments restants de l'intervalle $[\![0, n-1]\!]$, il y a pour cela d_{n-k} choix possibles. Le nombre de permutations ayant k points fixes est donc $\mathrm{Card}\big(\{X_n = k\}\big) = \binom{n}{k}\ d_{n-k}$. Comme l'ensemble $\mathcal{S}_n$ est muni de la probabilité uniforme,

$$P(X_n = k) = \frac{\mathrm{Card}\big(\{X_n = k\}\big)}{\mathrm{Card}(\mathcal{S}_n)} = \binom{n}{k}\ \frac{d_{n-k}}{n!}\ .$$

La famille $\big(\{X_n = k\}\ ;\ 0 \leq k \leq n\big)$ étant un système complet d'événements, on a $\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$, d'où la relation

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ d_{n-k} = n! \quad .$$

b. La symétrie $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ des coefficients binomiaux et le changement d'indice $j = n-k$ permet d'écrire aussi $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\ d_j = n!$. En appliquant le formule d'inversion de Pascal, on déduit que

$$d_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j}\ \binom{n}{j}\ j! = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j}\ \frac{n!}{(n-j)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\ \frac{n!}{k!}$$

en faisant de nouveau le changement d'indice $j = n-k$.

c. Donc $\dfrac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$ puisque l'on reconnaît une somme partielle d'une série exponentielle.

5. Supposons **(H)** et transformons l'écriture de $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\ \binom{n}{k}\ a_k$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\ \binom{n}{k}\ a_k &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\ \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\ b_j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} (-1)^{n-k}\ \frac{n!}{k!(n-k)!}\ \frac{k!}{j!(k-j)!}\ b_j \\
&= n!\ \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!(k-j)!} \right) \frac{b_j}{j!}\ .
\end{aligned}$$

Arrangeons la somme entre parenthèses en posant $l = k - j$:

$$\sum_{k=j}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!(k-j)!} = \frac{1}{(n-j)!} \sum_{l=0}^{n-j} \binom{n-j}{l} (-1)^{n-j-l} = \frac{1}{(n-j)!} \big(1+(-1)\big)^{n-j} .$$

On en déduit que cette somme vaut 1 si $j = n$, et 0 si $j < n$. Il reste donc

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k = n! \, \frac{b_n}{n!} = b_n ,$$

ce qu'il fallait démontrer.