Planche 12

Si (u_n) et (u'_n) sont deux suites réelles convergeant vers un même réel a, on dit que (u'_n) converge vers a **plus rapidement** que (u_n) si on a $u'_n - a = o(u_n - a)$ lorsque $n \to +\infty$.

On définit une suite réelle (x_n) par $x_0 = \dfrac{1}{2}$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - x_n^2}}{2}} \ .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose ensuite $u_n = 6 \times 2^n\, x_n$, puis $u'_n = \dfrac{4u_{n+1} - u_n}{3}$.

1. Écrire un script Python affichant les six premiers termes des suites (u_n) et (u'_n). Que peut-on conjecturer sur le comportement asymptotique de ces suites ?

2. Soit (v_n) une suite réelle admettant un développement asymptotique de la forme

$$v_n = a + \lambda\, k_1^n + O(k_2^n)\ , \quad \text{avec} \quad 0 < |k_2| < |k_1| < 1\ ,\ a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{R}^*\ .$$

On pose $v'_n = \dfrac{v_{n+1} - k_1\, v_n}{1 - k_1}$ pour tout n. Montrer que $v'_n = a + O(k_2^n)$ lorsque $n \to +\infty$, et comparer les vitesses de convergence des suites (v_n) et (v'_n).

3.a. Montrer que $x_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{6 \times 2^n}\right)$ pour tout n entier naturel.

b. En déduire une preuve de la conjecture faite à la question **1.**

- -

1. Il semblerait que les deux suites convergent vers le nombre π, la deuxième plus rapidement que la première.

2. On a le développement asymptotique

$$v'_n = \frac{1}{1 - k_1}\left(a + \lambda\, k_1^{n+1} + O(k_2^n) - k_1 a - \lambda\, k_1^{n+1} + O(k_2^n)\right) = a + O(k_2^n)\ .$$

Pour n assez grand, on a $v_n - a \neq 0$ et

$$\frac{v'_n - a}{v_n - a} = \frac{O(k_2^n)}{\lambda k_1^n + O(k_2^n)} = \frac{O(k_2^n)}{k_1^n\,\left(\lambda + o(1)\right)} = O\left(\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^n\right) \quad \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \quad 0\ ,$$

donc (v'_n) converge vers a plus rapidement que (v_n).

3.a. L'égalité est vraie pour $n = 0$ et, si elle est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ donné, alors $1 - x_n^2 = 1 - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{6 \times 2^n}\right) = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{6 \times 2^n}\right)$ et, comme $\dfrac{\pi}{6 \times 2^n} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, le cosinus est positif, donc

$$1 - \sqrt{1 - x_n^2} = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{6 \times 2^n}\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{6 \times 2^{n+1}}\right)$$

et comme, de nouveau, le sinus est positif,

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - x_n^2}}{2}} = \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{6 \times 2^{n+1}}\right)} = \sin\left(\frac{\pi}{6 \times 2^{n+1}}\right)\ ,$$

ce qui achève la récurrence.

b. On a donc $u_n = 6 \times 2^n\, \sin\left(\dfrac{\pi}{6 \times 2^n}\right)$ pour tout n, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pi$ (*facile en utilisant* $\sin(x) \sim x$ *au voisinage de* 0) puis $\lim\limits_{n \to +\infty} u'_n = \pi$. En développant un peu plus, i.e. en utilisant $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + O(x^5)$ au voisinage de zéro, on obtient

$$u_n = 6 \times 2^n \left(\frac{\pi}{6 \times 2^n} - \frac{1}{6} \frac{\pi^3}{6^3 \times 8^n} + O\left(\frac{1}{32^n} \right) \right) = \pi - \frac{\pi^3}{216} \left(\frac{1}{4} \right)^n + O\left(\left(\frac{1}{16} \right)^n \right) .$$

On reconnaît un développement asymptotique de la forme proposée question **2.** avec $a = \pi$, $\lambda = -\dfrac{\pi^3}{216}$, $k_1 = \dfrac{1}{4}$ et $k_2 = \dfrac{1}{16}$, on a bien $0 < |k_2| < |k_1| < 1$. On "accélère" donc la convergence de la suite (u_n) vers π en la remplaçant par la suite (u'_n) avec

$$u'_n = \frac{u_{n+1} - k_1\, u_n}{1 - k_1} = \frac{4u_{n+1} - u_n}{3} .$$

C'est le **procédé d'accélération de convergence de Richardson-Romberg**.