Planche 13

Pour $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

1. Notons a_n le n-ième coefficient du développement en série entière de f. Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f, en déduire une relation entre a_n et a_{n+1}. Écrire un script Python pour calculer a_n.

2. On pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ pour x réel et $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire une fonction Python pour calculer $S_n(x)$ en fonction de n et de x.

3. Tracer les points M_n de coordonnées (n, a_n) pour n de 0 à 10. Que peut-on conjecturer sur la suite (a_n) ? Monotonie et limite de la suite (a_n) ? *Pour déterminer la limite de a_n, on cherchera un réel α tel que la série* $\sum \ln\left(\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^\alpha \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ *converge.*

4. Tracer les points P_n de coordonnées $\big(n, 2S_n(-1)\big)$ pour n de 0 à 10. Que peut-on conjecturer sur la limite $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \big(2S_n(-1)\big)$? Prouver cette conjecture.

- -

1. On a $f'(x) = \dfrac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{f(x)}{2(1-x)}$, soit **(E)**: $2(x-1)f'(x)+f(x) = 0$. Avec $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-1,1[$, cela donne

$$2\sum_{n=0}^{+\infty} n\, a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \ ,$$

donc, par unicité du développement en série entière, $2(n+1)a_{n+1} - (2n+1)a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour programmer le calcul des a_n de façon récursive, il sera plus commode d'écrire $a_n = \dfrac{2n-1}{2n}\, a_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, *cf.* script.

Remarque. D'après le cours, on a aussi

$$a_n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} (-1)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{4^n}\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} .$$

2. *cf.* script.

3. On peut conjecturer que (a_n) décroît et tend vers 0. La décroissance est facile puisque $a_n > 0$ et $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} < 1$. Pour la limite nulle, utilisons l'indication, soit α un réel, posons

$$u_n = \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \alpha\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) ,$$

soit encore $u_n = (\alpha-1)\ \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$. On fait un petit développement limité "à l'économie", i.e. en utilisant $\ln(1+x) = x + O(x^2)$ lorsque $x \to 0$, cela donne

$$u_n = (\alpha-1)\left(\frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) + \frac{1}{2n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) = \frac{2\alpha-1}{2n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) .$$

En choisissant $\alpha = \dfrac{1}{2}$, la série $\sum u_n$ est alors absolument convergente, donc convergente, puisque son terme général est un $O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$. Mais l'on observe que, avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$,

$$u_n = \ln\big(\sqrt{n+1}\, a_{n+1}\big) - \ln\big(\sqrt{n}\, a_n\big) \ ,$$

on reconnaît donc une série télescopique. On a donc prouvé la convergence de la suite de terme général $\ln\left(\sqrt{n}\,a_n\right)$. Posons $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\sqrt{n}\,a_n\right)$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}a_n = e^l > 0$, puis $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^l}{\sqrt{n}}$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Remarque. De l'expression $a_n = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}$ et de la formule de Stirling, on peut déduire plus précisément l'équivalent $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi\, n}}$.

4. On dirait bien que $l = \sqrt{2}$... Prouvons-le, pardi!

Il s'agit en fait de montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Posons $u_n(x) = a_n x^n$, les fonctions u_n sont continues sur le segment $I = [-1, 0]$ et la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur ce segment. En effet, pour $x \in I$ fixé, la suite de terme général $\left|u_n(x)\right| = a_n\,|x|^n$ décroît et tend vers zéro (conséquence facile de la question **3.**), et la série $\sum u_n(x)$ est alternée, on peut donc majorer son reste:

$$\left|R_n(x)\right| := \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \left|u_{n+1}(x)\right| = a_{n+1}|x|^{n+1} \leq a_{n+1}\ .$$

Cett majoration **uniforme** du reste montre que $\|R_n\|_{\infty,I} \leq a_{n+1}$, donc $\|R_n\|_{\infty,I} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouve la convergence uniforme de la série $\sum u_n$ sur I. La fonction somme $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est alors continue sur I et en particulier au point -1 (à droite). Comme S coïncide avec f sur $]-1, 0]$, on a donc

$$S(-1) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n = \lim_{x\to(-1)^+} S(x) = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$

ce qui prouve que $l = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\,S_n(-1) = \sqrt{2}$.

Remarque. On a ainsi calculé la somme d'une série, à savoir $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.