**Planche 14**

Un ascenseur avec $n$ personnes monte dans un bâtiment ayant $p$ étages. Les personnes descendent chacune aléatoirement et indépendamment à un étage. On note $X$ la variable aléatoire qui donne le nombre d'étages auxquels l'ascenseur s'est arrêté.

**1.** En utilisant `np.randint`, écrire une fonction Python simulant la loi de $X$.

**2.a.** Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, soit $X_i$ la variable aléatoire qui vaut 1 si l'ascenseur s'est arrêté au $i$-ième étage, et 0 sinon. Donner la loi de $X_i$.

**b.** Exprimer $X$ en fonction des $X_i$. En déduire $\mathrm{E}(X)$ en fonction de $n$ et $p$.

**3.a.** Déterminer $\lim\limits_{p \to +\infty} \mathrm{E}(X)$, avec $n$ fixé.

**b.** On fixe $n = 10$. Calculer avec Python $\mathrm{E}(X)$ pour $p = 20$, $p = 100$, et confirmer le résultat précédent.

**4.** Si $a$ et $b$ sont deux entiers naturels non nuls, on note $S_{a,b}$ le nombre de surjections d'un ensemble à $a$ éléments vers un ensemble à $b$ éléments.

**a.** Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\min\{n,p\}} \binom{p}{k} S_{n,k} = p^n$.

**b.** À l'aide de $\mathrm{E}(X)$, obtenir que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\min\{n,p\}} \binom{p-1}{k-1} S_{n,k} = p^n - (p-1)^n$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

**1.** *cf.* script.

**2.a.** Chacune des $n$ personnes choisit de façon équiprobable un des $p$ étages où il va descendre. Pour modéliser cette situation aléatoire, on prend pour univers $\Omega = \mathcal{F}\Big([\![1, n]\!], [\![1, p]\!]\Big)$, soit $\Omega = [\![1, p]\!]^{[\![1,n]\!]}$, l'ensemble des applications d'un ensemble à $n$ éléments (les personnes présentes au départ de l'ascenseur) vers un ensemble à $p$ éléments (les étages desservis), et on munit $\Omega$ de la probabilité uniforme. On a donc $|\Omega| = p^n$. La variable $X_i$ prend les valeurs 0 et 1, c'est donc une variable de Bernoulli, et si $f \in \Omega$, on a $X_i(f) = 0$ si et seulement si $f$ prend ses valeurs dans l'ensemble $[\![1, p]\!] \setminus \{i\}$, de cardinal $p - 1$. Parmi les $p^n$ applications de $[\![1, n]\!]$ vers $[\![1, p]\!]$, il y en a $(p-1)^n$ dont l'image ne contient pas l'élément $i$, donc $P(X_i = 0) = \dfrac{(p-1)^n}{p^n}$. Le paramètre de la loi de Bernoulli suivie par la variable $X_i$ est alors $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{p}\right)^n$. Bref, $X_i \sim \mathcal{B}\left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{p}\right)^n\right)$.

**b.** On a clairement $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} X_i$ donc, par linéarité de l'espérance, $\mathrm{E}(X) = p\left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{p}\right)^n\right)$.

**3.a.** Par un petit développement limité,

$$\mathrm{E}(X) = p\left(1 - \left(1 - \frac{n}{p} + o\Big(\frac{1}{p}\Big)\right)\right) = n + o(1) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} n\ .$$

**b.** *cf.* script.

**4.a.** Si $f \in \Omega = [\![1, p]\!]^{[\![1,n]\!]}$, alors $\Big|f\big([\![1, n]\!]\big)\Big| \in [\![1, \min\{n, p\}]\!]$.

Soit $B$ une partie non vide de l'intervalle entier $[\![1, p]\!]$, soit $k$ son cardinal. Si $f \in \Omega$ vérifie $f\big([\![1, n]\!]\big) = B$, alors $f$ établit une surjection de $[\![1, n]\!]$ vers $B$. Il y a alors autant d'applications de $[\![1, n]\!]$ vers $[\![1, p]\!]$ dont l'image est $B$ que de surjections de $[\![1, n]\!]$ vers $B$, à savoir $S_{n,k}$. Comme il y a $\dbinom{p}{k}$ façons de choisir une partie $B$ de cardinal $k$ dans $[\![1, p]\!]$, on déduit que

$$|\Omega| = p^n = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} S_{n,k} = \sum_{k=1}^{\min\{n,p\}} \binom{p}{k} S_{n,k} \ .$$

**b.** Comme $X(\Omega) = [\![1, \min\{n,p\}]\!]$, par définition de l'espérance,

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\min\{n,p\}} k\ P(X=k) = \sum_{k=1}^{\min\{n,p\}} k\ \binom{p}{k} \frac{S_{n,k}}{p^n} = \frac{1}{p^{n-1}} \sum_{k=1}^{\min\{n,p\}} \binom{p-1}{k-1} S_{n,k} \ .$$

*On a en effet* $P(X=k) = \dfrac{|\Omega_k|}{|\Omega|}$ *où* $\Omega_k$ *est l'ensemble des applications de* $[\![1,n]\!]$ *vers* $[\![1,p]\!]$ *ayant une image de cardinal* $k$*, et le* **a.** *ci-dessus montre que* $|\Omega_k| = \dbinom{p}{k} S_{n,k}$*. On a ensuite utilisé le relation classique* $k \dbinom{p}{k} = p \dbinom{p-1}{k-1}$.

Donc $p\left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{p}\right)^n\right) = \dfrac{1}{p^{n-1}} \displaystyle\sum_{k=1}^{\min\{n,p\}} \binom{p-1}{k-1} S_{n,k}$, ce qui donne la relation voulue.