Planche 15

Soit y un réel qui n'est pas un demi-entier, on définit q l'entier "le plus proche" de y comme étant le seul entier q vérifiant $|y-q| < \dfrac{1}{2}$.

1.a. Écrire une fonction Python qui prend comme argument un réel y et qui renvoie l'entier le plus proche de y.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n l'entier le plus proche de $n!e^{-1}$, et on pose $b_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Écrire un script Python pour calculer les 16 premiers termes des suites (a_n) et (b_n). Faire une conjecture.

c. Démontrer le résultat conjecturé ci-dessus.

2. Pour tout n, on pose $d_n = n!\, e^{-1} - b_n$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\, e^x \, \mathrm{d}x$.

a. Écrire un script Python pour calculer les 16 premiers termes des suites (d_n) et $\left(\dfrac{J_n}{d_n}\right)$. Faire une conjecture.

b. Prouver la conjecture faite ci-dessus.

- -

1.a. *cf.* script. On a en fait $a_n = \left\lfloor e^{-1}n + \dfrac{1}{2} \right\rfloor$.

b. *cf.* script. On conjecture que $a_n = b_n$ pour $n \geq 1$.

c. La série exponentielle $\sum \dfrac{(-1)^k}{k!}$ est alternée, et la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant, le théorème spécial permet alors de majorer la valeur absolue du reste, soit

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right| = \left| e^{-1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} .$$

En multipliant par $n!$, on déduit

$$|n!e^{-1} - b_n| \leq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2} \quad (\text{pour } n \geq 2) ,$$

donc b_n, qui est bien un entier puisque $\dfrac{n!}{k!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ est entier pour $k \in [\![0, n]\!]$, est l'entier le plus proche de $n!e^{-1}$.

2.a. *cf.* script. On conjecture que $\dfrac{J_n}{d_n} = (-1)^{n+1}\, e$.

b. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $g : x \mapsto e^{-x}$ entre 0 et 1 à l'ordre n. Comme $g^{(k)}(x) = (-1)^k\, e^{-x}$, et notamment $g^{(k)}(0) = (-1)^k$, cela donne

$$g(1) = e^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k + \int_0^1 \frac{(1-x)^n\, g^{(n+1)}(x)}{n!} \, \mathrm{d}x ,$$

soit, en posant $x = 1-t$ dans l'intégrale,

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^1 (-1)^{n+1}\, t^n\, e^{t-1} \, \mathrm{d}t = \frac{b_n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1}\, e^{-1}}{n!} \int_0^1 t^n\, e^t \, \mathrm{d}t ,$$

soit enfin

$$d_n = n!\, e^{-1} - b_n = (-1)^{n+1}\, e^{-1}\, J_n , \quad \text{donc} \quad J_n = (-1)^{n+1}\, e\, d_n .$$