Planche 16

Pour $n \geq 2$, on considère la matrice $M_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M_n[i,j] = \min\{i,j\}$, et $T_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, triangulaire supérieure avec des coefficients 1 sur le triangle supérieur (diagonale comprise).

1. Écrire un script Python réalisant l'affichage de M_n, pour n de 2 à 10.

2. Calculer $\det(M_n)$ pour n de 2 à 10. Conjecturer un résultat.

3. Écrire un script Python réalisant l'affichage de T_n, pour n de 2 à 10.

4. Pour $n \in [\![2, 10]\!]$, faire afficher la matrice $T_n^\top T_n$.

5. Conjecturer un résultat, puis le démontrer.

6. Montrer que $M_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

7. Soit λ_n la plus grande valeur propre de M_n. Montrer que $\lambda_n \geq \dfrac{n+1}{2}$.

8. Calculer M_n^{-1} pour n quelconque.

9. Utiliser Python pour le caclul de M_n^{-1}.

- -

1., 2., 3., 4. *cf.* script.

5. • Le déterminant de M_n se calcule facilement par récurrence. On a $\det(M_1) = 1$ et, pour tout $n \geq 2$, partant de $\det(M_n)$, les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_1$ $(2 \leq i \leq n)$, puis un développement par rapport à la première colonne, nous ramènent immédiatement au déterminant de M_{n-1}. Donc $\det(M_n) = 1$ pour tout n.

• En disposant le calcul de $T_n^\top T_n$, on voit que le coefficient d'indices (i,j) du produit est une somme de 1×1 qui sont au nombre de $\min(i,j)$, donc $T_n^\top T_n = M_n$.

6. La matrice M_n est symétrique réelle, donc diagonalisable. Si λ est une valeur propre de M_n et X un vecteur propre associé ($X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq 0$ et $M_n X = \lambda X$), alors $T_n^\top T_n X = \lambda X$, puis $X^\top T_n^\top T_n X = \lambda X^\top X$, soit $\|T_n X\|^2 = \lambda \|X\|^2$, donc $\lambda = \dfrac{\|T_n X\|^2}{\|X\|^2}$. La matrice T_n étant inversible, on a $T_n X \neq 0$, donc $\|T_n X\| > 0$, puis $\lambda > 0$.

7. Par l'absurde, supposons que toutes les valeurs propres de M_n soient strictement inférieures à $\dfrac{n+1}{2}$. Alors la trace de M_n, qui est la somme de ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité, serait strictement inférieure à $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Mais on constate que $\mathrm{Tr}(M_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, ce qui contredit l'hypothèse faite. Au moins une des valeurs propres de M_n est donc supérieure ou égale à $\dfrac{n+1}{2}$.

8. On peut bien sûr calculer M_n^{-1} directement par l'algorithme de Gauss-Jordan, mais c'est assez long. Je pense que l'idée est d'utiliser la relation $M_n = T_n^\top T_n$. Si l'on sait inverser T_n, alors $M_n^{-1} = T_n^{-1}\big(T_n^\top\big)^{-1} = T_n^{-1}\,\big(T_n^{-1}\big)^\top$ est rapide à obtenir par un produit matriciel. Par l'algorithme de Gauss-Jordan consistant à effectuer des opérations élémentaires sur les lignes simultanément sur la matrice T_n et sur la matrice I_n, on obtient $T_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$. *On a effectué $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$, avec i de 2 à n dans l'ordre* *croissant*. Puis $M_n^{-1} = T_n^{-1}\left(T_n^{-1}\right)^\top = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & (0) \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ (0) & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut aussi présenter les calculs sous la forme de résolution d'un système linéaire: on se donne $Z \in \mathbb{R}^n$ et on doit résoudre le système $M_n X = Z$, soit $T_n^\top T_n X = Z$, que l'on décompose en introduisant une variable intermédiaire $Y = T_n X$. On cherche donc d'abord Y tel que $T_n^\top Y = Z$, ensuite X tel que $T_n X = Y$. Le lecteur est invité à écrire les détails.

9. *cf.* script.