Pour $x \in]-1,1[$, on pose $\;f(x)=\dfrac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}$.

a. Montrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

b. On note $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ ce développement en série entière. Écrire une fonction en langage Python qui calcule c_n, prenant n comme argument. Calculer c_n pour $n \in [\![0,199]\!]$.

c. Avec Python, comparer c_n et c_{n+6} pour $n \in [\![0,184]\!]$. Faire une conjecture.

d. En considérant la fonction $g : x \mapsto (1-x^6)\,f(x) - \dfrac{1}{1-x}$, prouver cette conjecture.

e. Pour tout n entier naturel, on pose $D_n = \big\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid 2p+3q=n\big\}$, et $d_n = \mathrm{Card}(D_n)$. Écrire une fonction Python prenant comme argument un entier naturel n et retournant la liste des éléments de l'ensemble D_n.

f. Vérifier expérimentalement la relation $c_n = d_n$, puis la démontrer.

- -

a. Les fonctions $u : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2} = (1-x^2)^{-1}$ et $v : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^3} = (1-x^3)^{-1}$ sont DSE sur $]-1,1[$. Par produit de Cauchy, il en est donc de même de $f=uv$. Pour le calcul, précisons:

$$u(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\ , \quad \text{avec} \quad a_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \bmod 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

De même,

$$v(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} x^{3k} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\ , \quad \text{avec} \quad b_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \bmod 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Enfin, pour $|x|<1$, $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ avec $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

b. *cf.* script.

c. *cf.* script. Il semblerait que $c_{n+6}=c_n+1$.

d. D'une part, on calcule, pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$,

$$g(x)=\frac{1-x^6}{(1-x^2)(1-x^3)} - \frac{1}{1-x} = \frac{(1-x^6)-(1+x)(1-x^3)}{(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{-x^6+x^4+x^3-x}{x^5-x^3-x^2+1} = -x\ .$$

D'autre part, sur $]-1,1[$, on a

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - x^6\,f(x) - \frac{1}{1-x} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n+6} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - \sum_{n=6}^{+\infty} c_{n-6}\, x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{5} (c_n-1)x^n + \sum_{n=6}^{+\infty} (c_n - c_{n-6} - 1)x^n\ , \end{aligned}$$

et ceci doit aussi être égal à $\;-x = 0\,x^0 - 1\,x^1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} 0\,x^n$ sur $]-1,1[$. Par unicité du développement en série entière, on peut identifier les coefficients, ce qui donne notamment $c_n - c_{n-6} - 1 = 0$ pour tout $n \geq 6$, soit $c_{n+6} = c_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e. *cf.* script.

f. On a $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, mais a_k et b_{n-k} prenant leurs valeurs dans $\{0,1\}$, il en est de même de leur produit, qui vaut alors 1 si et seulement si $a_k = 1$ et $b_{n-k} = 1$, donc si et seulement s'il existe p et q entiers naturels tels que $k = 2p$ et $n - k = 3q$. Donc c_n est égal au nombre d'entiers k dans $[\![0, n]\!]$ tels que $2 \mid k$ et $3 \mid n - k$, c'est aussi le nombre de couples (p, q) dans $[\![0, n]\!]^2$, donc dans $\mathbb{N}^2$, tels que $2p + 3q = n$. Ainsi $c_n = d_n$.