ENDOMORPHISMES des ESPACES EUCLIDIENS

I. Isométries vectorielles.

Définition. Soit E un espace euclidien, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On dit que u est une **isométrie vectorielle** s'il conserve la norme des vecteurs, i.e.

$$\forall x \in E \qquad \big\|u(x)\big\| = \|x\| \ .$$

Il est immédiat qu'un tel endomorphisme est nécessairement injectif (si $u(x) = 0_E$, alors $\|x\| = 0$ donc $x = 0_E$), donc bijectif car E est de dimension finie, c'est donc un automorphisme de l'espace vectoriel E. Les isométries vectorielles de l'espace euclidien E sont aussi appelés **automorphismes orthogonaux**.

On dispose de différentes caractérisations de ces endomorphismes.

Caractérisation 1. Un endomorphisme u d'un espace euclidien E est une isométrie si et seulement s'il conserve le produit scalaire, i.e. si et seulement si

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad \big(u(x)|u(y)\big) = (x|y) \ .$$

Preuve. Il est évident que la conservation du produit scalaire entraîne la conservation de la norme puisque $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ pour tout vecteur x de E.

La réciproque résulte des identités de polarisation. En effet, si $u \in \mathcal{L}(E)$ conserve la norme, si x et y sont deux vecteurs de E, alors

$$\begin{aligned}
\big(u(x)|u(y)\big) &= \frac{1}{4}\Big(\big\|u(x)+u(y)\big\|^2 - \big\|u(x)-u(y)\big\|^2\Big) && \text{(polarisation)}\\
&= \frac{1}{4}\Big(\big\|u(x+y)\big\|^2 - \big\|u(x-y)\big\|^2\Big) && \text{(linéarité de } u\text{)}\\
&= \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big) && \text{(conservation de la norme)}\\
&= (x|y) \ , && \text{(polarisation)}
\end{aligned}$$

et u conserve donc le produit scalaire.

Caractérisation 2. Un endomorphisme u d'un espace euclidien E est une isométrie si et seulement s'il transforme une base orthonormale en une base orthonormale.

Commentaire. Il y a ambiguïté sur le premier "une". En fait, il y a équivalence entre les trois assertions ci-dessous:

(i): u est une isométrie vectorielle ;

(ii): u transforme **toute** BON de E en une BON ;

(iii): il existe une BON de E dont l'image par u est une BON.

Preuve.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): *si u est une isométrie de E et si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une BON de E, alors $(e_i|e_j) = \delta_{i,j}$ pour tout couple (i,j). La conservation du produit scalaire donne alors $\big(u(e_i)|u(e_j)\big) = \delta_{i,j}$ pour tout (i,j), la famille image $u(\mathcal{B}) = \big(u(e_1), \cdots, u(e_n)\big)$ est donc orthonormale, donc libre et, comme elle est de cardinal $n = \dim(E)$, c'est bien une BON de E.*

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): *évident!*

(iii) $\Longrightarrow$ (i): *Supposons qu'il existe une BON $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E telle que l'image $u(\mathcal{B}) = \big(u(e_1), \cdots, u(e_n)\big)$ est aussi une BON. Si x est un vecteur de E, on le décompose dans la base $\mathcal{B}$: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, et comme $\mathcal{B}$ est orthonormale, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Par linéarité, $u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)$ et, comme la famille $u(\mathcal{B})$ est aussi une base orthonormale, on a $\big\|u(x)\big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2$, donc u conserve la norme, c'est bien une isométrie.*

<u>Proposition et définition.</u> L'ensemble des isométries vectorielles de l'espace euclidien E est muni d'une structure de groupe pour la loi $\circ$ de composition, on l'appelle le groupe orthogonal de E, et on le note $\mathrm{O}(E)$.

Preuve. L'ensemble $\mathrm{O}(E)$ *est un sous-groupe du groupe linéaire* $\mathrm{GL}(E)$*. Ces notions générales de groupe et de sous-groupe ne figurent en fait pas à votre programme. Sans approfondir, disons simplement que cela traduit les propriétés suivantes:*

- la composée de deux isométries est encore une isométrie ;

- l'identité id_E est une isométrie ;

- si u est une isométrie, la bijection réciproque u^{-1} est encore une isométrie.

Les preuves sont immédiates en utilisant la conservation de la norme.

<u>Proposition.</u> Si $u \in \mathrm{O}(E)$, si F est un s.e.v. de E stable par u, alors son orthogonal $F^\perp$ est stable par u.

Preuve. Dire que F est stable par u signifie a priori que $u(F) \subset F$, mais comme u est une application linéaire injective, elle conserve les dimensions (appliquer le théorème du rang à la restriction $u|_F$), donc $u(F) = F$. Si l'on prend maintenant un vecteur x dans $F^\perp$, et un vecteur y dans F, d'après la remarque ci-dessus, on a aussi $y \in u(F)$ donc il existe $z \in F$ tel que $y = u(z)$, puis, en utilisant la conservation du produit scalaire,

$$\big(u(x)|y\big) = \big(u(x)|u(z)\big) = (x|z) = 0 \ .$$

On a ainsi montré que $u(x) \in F^\perp$, ce qu'il fallait prouver.

<u>Proposition.</u> Si $u \in \mathrm{O}(E)$, alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$.

Preuve. Si un réel λ est valeur propre de u, si $x \in E \setminus \{0_E\}$ est un vecteur propre associé, on a $u(x) = \lambda x$, puis $\big\|u(x)\big\| = |\lambda|\,\|x\|$. Mais d'autre part $\big\|u(x)\big\| = \|x\|$, donc $|\lambda| = 1$.

<u>Exemple des symétries orthogonales.</u> Soit F un s.e.v. de E euclidien. La **symétrie orthogonale par rapport à** F est la symétrie par rapport à F et parallèlement à $F^\perp$, c'est aussi l'endomorphisme s_F de E défini par $s_F = 2p_F - \mathrm{id}_E$, où p_F est le projecteur orthogonal sur F. Alors s_F est une isométrie: en effet, si $x \in E$, on le décompose en $x = y+z$ avec $y = p_F(x) \in F$ et $z \in F^\perp$, on a alors $s_F(x) = y - z$. Comme les vecteurs y et z (ou $-z$) sont orthogonaux, le théorème de Pythagore donne

$$\big\|s_F(x)\big\|^2 = \|y\|^2 + \|-z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2 \ ,$$

donc $s_F \in \mathrm{O}(E)$.

<u>Exercice.</u> Dans un espace euclidien E, montrer qu'une symétrie s est une isométrie si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.

<u>Cas particulier des réflexions.</u> Soit H un hyperplan dans E euclidien. La symétrie orthogonale par rapport à H, notée s_H, est aussi appelée **réflexion d'hyperplan** H. Si a est un vecteur **unitaire** normal à H, en notant $D = \mathrm{Vect}(a) = H^\perp$, on sait que pour tout vecteur x de E, on a $p_D(x) = (a|x)a$, puis $p_H(x) = x - p_D(x) = x - (a|x)a$, et enfin

$$s_H(x) = p_H(x) - p_D(x) = x - 2\,(a|x)\,a \ .$$

II. Matrices orthogonales.

Définition. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** si elle vérifie $A^\top A = I_n$.

On sait, par ailleurs, que, si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, la relation $AB = I_n$ entraîne $BA = I_n$, et signifie finalement que A est inversible avec $A^{-1} = B$.

On a donc les équivalences:

$$A \text{ est orthogonale} \iff A^\top A = I_n \iff AA^\top = I_n \iff A \text{ est inversible et } A^{-1} = A^\top .$$

Il est clair aussi que A est orthogonale *si et seulement si* sa transposée $A^\top$ est orthogonale.

Voyons comment cela se traduit sur les lignes ou les colonnes de la matrice A. Posons $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, soit $C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ le j-ème vecteur-colonne de cette matrice. Pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient d'indices (i, j) de la matrice-produit $A^\top A$ est

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (A^\top)_{i,k}(A)_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j} = (C_i|C_j) \ ,$$

i.e. c'est le produit scalaire (canonique) des vecteurs C_i et C_j dans $\mathbb{R}^n$.

On en déduit que A est orthogonale *si et seulement si* $(C_i|C_j) = \delta_{i,j}$ pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, i.e. *si et seulement si* la famille $(C_1, \cdots, C_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (pour le produit scalaire canonique).

Comme A est orthogonale *si et seulement si* sa transposée l'est, on a donc la même caractérisation portant sur les vecteurs-lignes $L_i^\top = \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ si on les considère aussi comme des éléments de $\mathbb{R}^n$ (d'où l'utilisation du symbole $^\top$ pour transformer ces vecteurs-lignes en des matrices-colonnes). Finalement, en considérant que $(\cdot|\cdot)$ représente le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n \simeq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} A \text{ est orthogonale} &\iff \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad (C_i|C_j) = \delta_{i,j} \\ &\iff (C_1, \cdots, C_n) \quad \text{est une base orthonormale de } \mathbb{R}^n \\ &\iff \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad (L_i^\top|L_j^\top) = \delta_{i,j} \\ &\iff (L_1^\top, \cdots, L_n^\top) \quad \text{est une base orthonormale de } \mathbb{R}^n \ . \end{aligned}$$

Pour vérifier pratiquement qu'une matrice est orthogonale, on peut s'assurer que:

- sur chaque colonne, la somme des carrés des coefficients vaut 1 ;
- sur deux colonnes distinctes, la somme des produits deux à deux des coefficients est nulle.

On peut bien sûr faire cette vérification sur les lignes au lieu des colonnes.

Exemples. Le lecteur vérifiera que les matrices $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ sont orthogonales.

Proposition et définition. L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n est muni d'une structure de groupe pour le produit matriciel, on l'appelle groupe orthogonal d'ordre n, et on le note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, ou encore $\mathrm{O}(n)$.

Preuve. L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe linéaire matriciel $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Cela traduit les propriétés suivantes:

- le produit de deux matrices orthogonales est encore une matrice orthogonale ;

- la matrice-identité I_n est une matrice orthogonale ;

- si A est une matrice orthogonale, son inverse A^{-1} est encore une matrice orthogonale.

Les preuves sont immédiates en utilisant la caractérisation par $A^\top A = I_n$.

Proposition. Si A est une matrice orthogonale, alors $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Preuve. En effet, si $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors $A^\top A = I_n$. En passant aux déterminants, on a

$$\det(A^\top)\ \det(A) = \big(\det(A)\big)^2 = 1\ .$$

Proposition et définition. L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n et de déterminant $+1$ est un sous-groupe du groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on l'appelle groupe spécial orthogonal d'ordre n, et on le note $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, ou encore $\mathrm{SO}(n)$. Les matrices appartenant à $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont dites "orthogonales directes".

Preuve. Cela traduit les propriétés suivantes, qui sont immédiates:

- le produit de deux matrices orthogonales directes est encore une matrice orthogonale directe ;

- la matrice-identité I_n est une matrice orthogonale directe;

- si A est une matrice orthogonale directe, son inverse A^{-1} est encore une matrice orthogonale directe.

Remarque. Les matrices orthogonales de déterminant -1 sont dites "**indirectes**". Elles ne constituent pas un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ puisque le produit de deux matrices orthogonales indirectes est une matrice orthogonale directe.

Les matrices orthogonales sont utilisées comme matrices de changement de base orthonormale, plus précisément:

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale d'un espace euclidien E, soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E. Alors la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est orthogonale si et seulement si la base $\mathcal{B}'$ est orthonormale.

Preuve. Posons $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$, et $P = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a $e'_j = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$. Comme la base $\mathcal{B}$ est orthonormale, le produit scalaire *de deux vecteurs e'_j et e'_k est la somme des produits deux à deux de leurs coordonnées, soit $(e'_j|e'_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,k}$. La base $\mathcal{B}'$ est alors orthonormale si et seulement si $(e'_j|e'_k) = \delta_{j,k}$ pour tout couple $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$, i.e. si et seulement si $\forall (j,k) \in [\![1,n]\!]^2 \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,k} = \delta_{j,k}$, et on a vu que cette relation caractérisait l'orthogonalité de la matrice A.*

On retiendra essentiellement le résultat suivant:

Dans un espace euclidien, la matrice de passage d'une base orthonormale à une autre base orthonormale est une matrice orthogonale.

Les matrices orthogonales sont enfin utilisées pour représenter les isométries vectorielles dans un espace euclidien, rapporté à une base orthonormale. Plus précisément, on a:

<u>Proposition.</u> Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Il y a alors équivalence entre les assertions suivantes:

(i): u est une isométrie vectorielle ;

(ii): dans toute BON de E, u est représenté par une matrice orthogonale ;

(iii): il existe une BON de E dans laquelle u est représenté par une matrice orthogonale.

Preuve.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)*: si u est une isométrie de E et si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une BON de E, on sait que la famille image $u(\mathcal{B}) = \big(u(e_1), \cdots, u(e_n)\big)$ est une BON de E. La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ représentant u dans la base $\mathcal{B}$ étant aussi la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $u(\mathcal{B})$, elle est orthogonale d'après la proposition précédente.*

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)*: évident!*

(iii) $\Longrightarrow$ (i)*: Supposons qu'il existe une BON $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E dans laquelle u est représenté par une matrice orthogonale $A = (a_{i,j})$. On a alors $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}e_i$ pour tout j, donc ($\mathcal{B}$ étant une BON), $\big(u(e_j)|u(e_k)\big) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,k} = \delta_{j,k}$ d'après une des caractérisations des matrices orthogonales. La base orthonormale $\mathcal{B}$ est donc transformée en une base orthonormale, on en déduit que u est une isométrie.*

<u>Remarque.</u> Il résulte de cela que, si u est une isométrie d'un espace euclidien E, alors $\det(u) \in \{-1, 1\}$. Les isométries de déterminant $+1$ sont qualifiées de "**directes**" et constituent un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$, appelé **groupe spécial orthogonal** de E et noté $\mathrm{SO}(E)$. Celles de déterminant -1 sont dites "**indirectes**".

<u>Exemple.</u> Les réflexions sont des isométries indirectes. *En effet, si H est un hyperplan de E euclidien, si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n)$ est une base orthonormale de E adaptée à la décomposition $E = H \oplus H^{\perp}$, la réflexion d'hyperplan H est représentée dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice $D = \mathrm{diag}(1, \cdots, 1, -1)$, de déterminant -1.*

<u>Remarque.</u> Si $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1, 1\}$. Mais A peut avoir des valeurs propres complexes, qui sont alors de module 1, le lecteur est invité à le démontrer.

<u>**Retour sur le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.**</u> **Si $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ est une famille libre finie de vecteurs d'un espace préhilbertien E, il existe une unique famille $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ de même cardinal telle que:**

(C1): la famille $\mathcal{E}$ est orthonormale ;

(C2): pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k) = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_k)$;

(C3): pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(e_k|x_k) > 0$.

Preuve. L'existence a été démontrée dans le chapitre précédent et un procédé algorithmique de construction a été décrit. Montrons maintenant l'unicité d'une telle famille $\mathcal{E}$. Supposons que deux telles familles existent, notées respectivement $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{E}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$. Alors $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux bases orthonormales de l'espace euclidien $V = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$. Notons $P = P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = (p_{i,j})$ la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$. Cette matrice P est alors orthogonale puisque les deux bases sont orthonormales. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, le vecteur e'_j appartient à $\mathrm{Vect}(e'_1, \cdots, e'_j)$ qui est aussi $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_j)$, les coordonnées de e'_j dans la base $\mathcal{E}$, qui sont aussi les coefficients de la j-ième colonne de la matrice P, sont donc nulles à partir du rang $j+1$, ce qui signifie que la matrice de passage P est triangulaire supérieure. Or, une matrice qui est à la fois orthogonale et triangulaire supérieure est nécessairement diagonale avec des coefficients diagonaux qui valent $+1$ ou -1 (exercice laissé au lecteur). Donc $P = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, ce qui signifie que $e'_k = \varepsilon_k e_k$ pour tout k avec $\varepsilon_k = \pm 1$. Si, pour un k donné, on avait $\varepsilon_k = -1$, alors les produits scalaires $(e_k|x_k)$ et $(e'_k|x_k)$ seraient opposés donc ne pourraient être tous deux strictement positifs. On a donc $\varepsilon_k = +1$ pour tout k, soit $P = I_n$, donc $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$.

III. <u>Espace euclidien orienté.</u>

1. <u>Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie</u>.

• Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n. La matrice de passage $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible donc $\det(P) \in \mathbb{R}^*$. Si $\det(P) > 0$, on dira que la base $\mathcal{B}'$ est **de même sens** que la base $\mathcal{B}$ (sinon on dira qu'elle est **de sens contraire**).

On a ainsi construit une "relation d'équivalence" (vocabulaire HP) dans l'ensemble des bases de E.

- *la réflexivité (une base est de même sens qu'elle-même) est immédiate puisque $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = I_n$, de déterminant $1 > 0$;*

- *la symétrie résulte de $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1}$ et de la relation $\det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$;*

- *la transitivité résulte de la relation de Chasles $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$ et du fait que le déterminant du produit de deux matrices est le produit de leurs déterminants.*

Comme un réel non nul est, soit strictement positif, soit strictement négatif, il y a exactement deux "classes d'équivalence": si l'on convient de fixer une base $\mathcal{B}_0$ de E comme "base de référence", les bases de même sens que $\mathcal{B}_0$ seront appelées **directes**, et les autres **indirectes**. On dit alors qu'on a **orienté** l'espace vectoriel E. *Les bases directes sont bien sûr de même sens entre elles, et les bases indirectes sont aussi de même sens entre elles.*

Par exemple, dans un espace euclidien orienté E de dimension n, il existe des **bases orthonormales directes** ou BOND. **La matrice de passage d'une BOND $\mathcal{B}$ à une**

autre BOND $\mathcal{B}'$ est une matrice orthogonale directe, i.e. de déterminant $+1$, soit encore $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

• Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, si $f \in \mathrm{GL}(E)$, i.e. f est un automorphisme de E, alors $\det(f) \in \mathbb{R}^*$, donc de façon semblable,

- si $\det(f) > 0$, on dira que f est un **automorphisme direct** ;
- si $\det(f) < 0$, on dira que f est un **automorphisme indirect**.

Un automorphisme direct transforme toujours une base $\mathcal{B}$ en une base $f(\mathcal{B})$ de même sens, on dit qu'il **conserve l'orientation**. *En effet,* $P_{\mathcal{B},f(\mathcal{B})} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, *donc*

$$\det\left(P_{\mathcal{B},f(\mathcal{B})}\right) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right) = \det(f) > 0 \; .$$

À l'inverse, un automorphisme indirect transforme toujours une base en une base de sens contraire, on dit qu'il **renverse l'orientation**.

Par exemple, dans un espace euclidien E, on rencontrera des **isométries directes** (parfois appelées **positives**), ce sont celles de déterminant $+1$, ce sont celles qui appartiennent au groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(E)$. Les autres sont les **isométries indirectes** ou **négatives**, de déterminant -1.

Remarque. Dans un espace euclidien E, une base $\mathcal{B}$ et son orthonormalisée $\mathcal{E}$ sont des bases de même sens. *En effet, la matrice de passage* $P = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = (p_{i,j})$ *est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs, donc* $\det(P) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} p_{i,i} > 0$.

2. Produit mixte.

a. Généralités.

Dans ce paragraphe, on se place dans un espace euclidien orienté E de dimension n. Soit $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormales directes de E, on a vu que la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est orthogonale directe, i.e. $P \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, donc $\det(P) = 1$.

• Si la famille $\mathcal{X}$ est liée, alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{X}) = 0$;

• Si la famille $\mathcal{X}$ est libre, alors c'est une base de E, et dans ce cas la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X})$ dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs x_1, $\cdots$, x_n respectivement dans la base $\mathcal{B}$ est aussi la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{X}}$. On a alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X})\right) = \det(P_{\mathcal{B},\mathcal{X}}) \; .$$

De la même façon, $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{X}) = \det(P_{\mathcal{B}',\mathcal{X}})$. Or, il existe entre les matrices de passage une "relation de Chasles": $P_{\mathcal{B},\mathcal{X}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\, P_{\mathcal{B}',\mathcal{X}}$. En passant aux déterminants, on obtient

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) = \det(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\big)\, \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{X}) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{X})$$

puisque la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ a pour déterminant 1.

On en déduit le résultat suivant:

Proposition et définition. Soit E un espace euclidien orienté de dimension n, soit $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n) \in E^n$ une famille de n vecteurs de E. Alors le déterminant de cette famille $\mathcal{X}$ est le même dans toute base orthonormale directe de E, on le nomme produit mixte des vecteurs x_1, $\cdots$, x_n et on le note $[x_1, \cdots, x_n]$. Ainsi,

$$\forall \mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n) \in E^n \qquad [x_1, \cdots, x_n] = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n) \qquad \textbf{avec } \mathcal{B} \textbf{ BOND de } E \; .$$

Les propriétés de ce produit mixte sont celles d'un déterminant, à savoir:

- la multilinéarité: l'application $E^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto [x_1, \cdots, x_n]$, est n-linéaire, i.e. linéaire par rapport à chaque variable ;

- le caractère alterné: $[x_1, \cdots, x_n]$ est nul dès que deux vecteurs x_i et x_j (avec $i \neq j$) sont égaux.

Il en résulte l'antisymétrie: si l'on échange deux vecteurs, alors le produit mixte est transformé en son opposé, et le fait que le produit mixte $[x_1, \cdots, x_n]$ est nul si et seulement si la famille $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ est liée, *cf.* cours sur les déterminants.

Bien sûr, si la famille $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ est une BOND de E, alors $[x_1, \cdots, x_n] = 1$.

b. <u>Cas de la dimension 2.</u>

Si E est un plan euclidien orienté, alors le produit mixte est une forme bilinéaire antisymétrique sur E, i.e. $[v, u] = -[u, v]$ pour tout couple (u, v) de vecteurs de E. On a alors $[u, v] = 0$ si et seulement si les vecteurs u et v sont colinéaires.

Si u et v sont deux vecteurs de E non colinéaires, alors la valeur absolue de leur produit mixte, $\big|[u, v]\big|$, représente l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs u et v.

c. <u>Cas de la dimension 3.</u>

Si E est un espace euclidien orienté de dimension trois, alors le produit mixte est une forme trilinéaire sur E, antisymétrique, i.e. conservé par permutation circulaire des trois vecteurs:

$$[u, v, w] = [v, w, u] = [w, u, v]$$

mais qui change de signe lorsque l'on échange deux des trois vecteurs:

$$[v, u, w] = [u, w, v] = [w, v, u] \;=\; -[u, v, w] \; .$$

On a alors $[u, v, w] = 0$ si et seulement si les vecteurs u, v et w sont "coplanaires", i.e. si la famille (u, v, w) est liée (cela revient en effet à dire qu'il existe un plan les contenant).

Si u, v et w sont trois vecteurs de E non coplanaires, alors la valeur absolue de leur produit mixte, $\big|[u, v, w]\big|$, représente le volume du parallélépipède construit sur ces trois vecteurs.

3. <u>Produit vectoriel</u>.

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace euclidien orienté de dimension 3.

<u>Proposition et définition.</u> Soient u et v deux vecteurs de E. Il existe alors un unique vecteur a de E tel que

$$\forall x \in E \qquad [u, v, x] = (a|x) \; .$$

Ce vecteur a est appelé <u>produit vectoriel</u> des vecteurs u et v, et noté $u \wedge v$.

Preuve. En effet, l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = [u, v, x]$ est une forme linéaire sur E. Le théorème de Riesz indique donc qu'il existe un unique vecteur a de E tel que $\varphi = \varphi_a : x \mapsto (a|x)$.

On a donc, pour tous vecteurs u, v et x de E, la relation

$$\textbf{(*):} \qquad \boxed{(u \wedge v \mid x) = [u, v, x] \ .}$$

De cette relation **(*)** vont découler les propriétés du produit vectoriel, qui sont listées ci-dessous.

Proposition 1. **Le produit vectoriel est bilinéaire et antisymétrique.**

Preuve. Soient u, u', v trois vecteurs de E, soit α un réel. On a alors, par linéarité du produit mixte par rapport à la première variable:

$$\forall x \in E \qquad [\alpha u + u', v, x] = \alpha [u, v, x] + [u', v, x] \ ,$$

soit $\quad \big((\alpha u + u') \wedge v \mid x\big) = \alpha\, (u \wedge v | x) + (u' \wedge v | x),$

soit $\quad \big((\alpha u + u') \wedge v \mid x\big) = \big(\alpha u \wedge v + u' \wedge v \mid x\big).$

Cette dernière égalité étant vraie pour tout vecteur x de E, on conclut que

$$(\alpha u + u') \wedge v = \alpha u \wedge v + u' \wedge v \ ,$$

soit la linéarité du produit vectoriel par rapport à la première variable (linéarité à gauche). On procède de même pour la linéarité à droite.

Enfin, pour tout x de E, on a $[v, u, x] = -[u, v, x]$, soit $(v \wedge u | x) = -(u \wedge v | x) = (-u \wedge v | x)$ et, de nouveau, ceci étant vrai pour tout vecteur x de E, on déduit l'antisymétrie (ou "anti-commutativité"): $v \wedge u = -u \wedge v$.

Proposition 2. **Soient $u \in E$, $v \in E$. Le produit vectoriel $u \wedge v$ est nul si et seulement si u et v sont colinéaires.**

Preuve. Par disjonction de cas.

• *si la famille (u, v) est libre, on peut la compléter en une base (u, v, w) de E, on a alors le produit mixte $(u \wedge v | w) = [u, v, w]$ qui est non nul, ce qui entraîne que $u \wedge v \neq 0_E$.*

• *si u et v sont colinéaires, alors pour tout vecteur x de E, la famille (u, v, x) est liée, on a donc $\forall x \in E \quad [u, v, x] = 0$, soit $\forall x \in E \quad (u \wedge v | x) = 0$, ce qui entraîne que $u \wedge v = 0_E$.*

Proposition 3. **Le produit vectoriel $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v.**

Preuve. C'est évident puisque $(u \wedge v | u) = [u, v, u] = 0$ et $(u \wedge v | v) = [u, v, v] = 0$.

Proposition 4. Calcul des coordonnées en BOND. **Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale directe de E, soient $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$ et $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$ deux vecteurs de E. Leur produit vectoriel $w = u \wedge v$ a pour coordonnées dans la base $\mathcal{B}$:**

$$\left\{ \begin{array}{lcl} w_1 & = & u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ w_2 & = & -(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ w_3 & = & u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{array} \right. .$$

Preuve. Soit $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in E$. On a alors, en développant le déterminant par rapport à la dernière colonne,

$$\begin{array}{rcl} (w|x) & = & w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 \qquad \textbf{(1)} \\ & = & (u \wedge v | x) = [u, v, x] = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \quad (u_2v_3 - u_3v_2)\, x_1 - (u_1v_3 - u_3v_1)\, x_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\, x_3\ . \qquad \mathbf{(2)}$$

Par identification (puisque l'égalité entre **(1)** *et* **(2)** *est vraie pour tout vecteur x de E), on obtient les expressions annoncées.*

<u>Proposition 5. Formule du double produit vectoriel.</u> Soient a, b, c trois vecteurs de E. On a alors la relation

$$\boxed{a \wedge (b \wedge c) = (a|c)\, b - (a|b)\, c\ .}$$

Preuve. Rien de bien passionnant, c'est du calcul.

Si $a = 0_E$ alors c'est évident, tout est nul.

Sinon, plaçons-nous, pour simplifier les calculs, dans une BOND adaptée. On commence par poser $e_1 = \dfrac{a}{\|a\|}$, on choisit une base orthonormale (e_2, e_3) dans le plan $\big(\mathrm{Vect}(a)\big)^{\perp}$, alors la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale de E. Si elle est indirecte, on remplace par exemple e_3 par $-e_3$, et on a maintenant une BOND. Dans cette base $\mathcal{B}$, les vecteurs a, b, c sont représentés respectivement par les colonnes $\begin{pmatrix} \|a\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

On calcule $a \wedge (b \wedge c) = \begin{pmatrix} \|a\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \|a\|\,(b_2c_1 - b_1c_2) \\ \|a\|\,(b_3c_1 - b_1c_3) \end{pmatrix}$. *On calcule aussi* $(a|c)\, b - (a|b)\, c = \|a\|\, c_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \|a\|\, b_1 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, *et on trouve la même chose.*

<u>Conséquence. Identité de Lagrange.</u> Soient x et y deux vecteurs de E, on a alors

$$\boxed{(x|y)^2 + \|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2\, \|y\|^2\ .}$$

Preuve. On écrit

$$\begin{aligned} \|x \wedge y\|^2 &= (x \wedge y | x \wedge y) \;=\; [x, y, x \wedge y] \;=\; [x \wedge y, x, y] \\ &= \big((x \wedge y) \wedge x \big| y\big) \;=\; \big(x \wedge (y \wedge x) \big| y\big) \\ &= \big((x|x)\, y - (x|y)\, x \;\big|\; y\big) \\ &= (x|x)\,(y|y) - (x|y)\,(x|y) \\ &= \|x\|^2\, \|y\|^2 - (x|y)^2\ . \end{aligned}$$

Le produit vectoriel est utilisé aussi pour compléter une famille orthonormale de deux vecteurs en une BOND. En effet, **si x et y sont deux vecteurs de E unitaires et orthogonaux, alors $(x, y, x \wedge y)$ est une base orthonormale directe de E.** *Le vecteur $x \wedge y$ est en effet orthogonal à la fois à x et à y, il est unitaire d'après l'identité de Lagrange, et la base $(x, y, x \wedge y)$ est directe puisque son produit mixte est positif: en relisant la preuve de l'identité de Lagrange, on voit que $[x, y, x \wedge y] = \|x \wedge y\|^2 = 1$.* Le choix de $x \wedge y$ comme troisième vecteur est le seul possible pour compléter la famille orthonormale (x, y) en une BOND de E puisque, si (x, y, z) est une BOND de E, on a $x \wedge y = z$ d'après la Proposition 4.

4. <u>Orientation corrélative d'un plan et d'une droite en dimension 3</u>.

Le fait d'orienter un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie ne confère pas d'orientation à un sous-espace F de E.

Toutefois, si E est un espace euclidien orienté de dimension trois, si P est un plan de E, le fait d'orienter le plan P induit une orientation de la droite $D = P^\perp$. Soit, en effet, (u, v) une base directe du plan P orienté, soit w un vecteur non nul de D, on dira que ce vecteur oriente la droite D corrélativement à P si le triplet (u, v, w) est une base directe de l'espace orienté E. Par exemple, si (u, v) est une base **orthonormale** directe du plan P orienté, alors le choix de $w = u \wedge v$ oriente la droite D corrélativement à P puisqu'on sait qu'alors (u, v, w) est une base orthonormale directe de E.

Inversement, toujours dans un espace euclidien orienté de dimension trois noté E, si D est une droite de E, le fait de choisir un vecteur non nul w de D oriente cette droite, et oriente aussi corrélativement le plan $P = D^\perp$: une base (u, v) de P sera dite "directe" si (u, v, w) est une base directe de E.

IV. <u>Isométries vectorielles d'un plan euclidien.</u>

1. <u>Explicitation des groupes $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.</u>

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cherchons à quelles conditions sur a, b, c, d elle appartient au groupe orthogonal. En utilisant la caractérisation des matrices orthogonales par leurs colonnes, i.e. par le fait que (C_1, C_2) doit constituer une BON de $\mathbb{R}^2$, on a

$$A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 & \textbf{(C1)} \\ b^2 + d^2 = 1 & \textbf{(C2)} \\ ab + cd = 0 & \textbf{(C3)} \end{cases} .$$

La condition **(C1)** peut se traduire par l'existence d'un réel θ tel que $\begin{cases} a = \cos\theta \\ c = \sin\theta \end{cases}$.

De même, la condition **(C2)** peut se traduire par l'existence d'un réel φ tel que $\begin{cases} b = \sin\varphi \\ d = \cos\varphi \end{cases}$.

La condition **(C3)** se traduit alors par $\sin(\theta + \varphi) = 0$, soit $\theta + \varphi = 0$ modulo π. Deux cas se présentent alors:

- si $\varphi = -\theta$ modulo 2π, alors A est de la forme $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec θ réel.

- si $\varphi = \pi - \theta$ modulo 2π, alors A est de la forme $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ avec θ réel.

On observe que les matrices R_θ sont directes (i.e. de déterminant $+1$), alors que les matrices S_θ sont indirectes (i.e. de déterminant -1). On peut donc conclure:

<u>Théorème.</u> $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta \; ; \; \theta \in \mathbb{R}\}$**, et** $\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{S_\theta \; ; \; \theta \in \mathbb{R}\}$**, en posant**

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \textbf{et} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad \textbf{pour tout } \theta \textbf{ réel} .$$

2. <u>Commutativité du groupe spécial orthogonal $SO_2(\mathbb{R})$.</u>

Il résulte des formules d'addition de la trigonométrie que

$$(\mathbf{1}): \qquad \forall(\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^2 \qquad R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}\ .$$

Comme, par ailleurs, $R_0 = I_2$, on déduit que, pour tout θ réel, $(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$.

De la relation **(1)** ci-dessus, on déduit en particulier que $R_\theta R_\varphi = R_\varphi R_\theta$, autrement dit

<u>Théorème.</u> $SO_2(\mathbb{R})$ **est un groupe commutatif.**

3. <u>Étude des rotations du plan euclidien orienté.</u>

Dans ce paragraphe, on note E un plan euclidien orienté. Les isométries vectorielles directes de E, i.e. les éléments du groupe spécial orthogonal $SO(E)$, sont appelées **rotations vectorielles** (ou "rotations" tout court, puisque nous n'en étudierons pas d'autres).

Soit $r \in SO(E)$ une telle rotation. Sa matrice dans une BOND $\mathcal{B}$ de E est une matrice orthogonale directe, donc de la forme R_θ pour un certain réel θ. Si $\mathcal{B}'$ est une autre BOND de E, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est aussi une matrice orthogonale directe, donc de la forme R_α pour un certain réel α. D'après l'effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme, on a alors, en utilisant la commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(r) = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r)\cdot P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (R_\alpha)^{-1}R_\theta R_\alpha = R_\theta R_\alpha (R_\alpha)^{-1} = R_\theta\ .$$

On conclut donc:

<u>Théorème.</u> La matrice d'une rotation (isométrie vectorielle directe) r d'un plan euclidien orienté E est la même dans toute base orthonormale directe de E. Elle est de la forme R_θ, où θ est un réel (déterminé modulo 2π) dépendant uniquement de la rotation r (et non du choix de la BOND). On dit que ce réel θ est une mesure de l'angle de la rotation r.

On dit alors que r est la **rotation d'angle** θ, et on la note r_θ.

Ainsi, dans toute BOND $\mathcal{B}$ de E, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r_\theta) = R_\theta$.

<u>Conséquence.</u> La relation matricielle $R_\theta R_\varphi = R_\varphi R_\theta = R_{\theta+\varphi}$ se traduit par la relation entre les rotations $r_\theta \circ r_\varphi = r_\varphi \circ r_\theta = r_{\theta+\varphi}$. **La composée "commutative" de la rotation d'angle θ et de la rotation d'angle φ est la rotation d'angle $\theta+\varphi$.**
On peut noter aussi que $r_0 = \mathrm{id}_E$ et $(r_\theta)^{-1} = r_{-\theta}$.

<u>Remarque. Écriture complexe d'une rotation.</u> Dans un plan euclidien orienté rapporté à une BOND, un vecteur u peut être représenté par un couple de coordonnées réelles (x,y), mais aussi par une affixe complexe $z = x+iy$. Dans ce contexte, la rotation d'angle θ est l'application qui, au vecteur d'affixe z, associe le vecteur d'affixe $z' = e^{i\theta}z$. *En effet, si on pose $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$, on a* $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *soit encore* $\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$, *et on vérifie que*

$$z' = x\cos\theta - y\sin\theta + i(x\sin\theta + y\cos\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)(x+iy) = e^{i\theta}z\ .$$

4. Angle orienté de deux vecteurs non nuls.

On se place toujours dans un plan euclidien orienté noté E.

• Soient d'abord u et v deux vecteurs **unitaires** de E. Il existe alors une unique rotation $r \in \mathrm{SO}(E)$ qui envoie u sur v. *En effet, si on note u' le vecteur "directement orthogonal" à u, c'est-à-dire son image par la rotation d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$, alors $\mathcal{B} = (u, u')$ est une BOND de E dans laquelle u a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et le vecteur v a des coordonnées de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ puisqu'il est unitaire, ce réel θ est alors l'angle de l'unique rotation r telle que $r(u) = v$.* L'angle de l'unique rotation r telle que $r(u) = v$ est alors appelé **angle orienté des vecteurs** u et v, et noté (u, v). Ainsi, si $r_\theta(u) = v$, on a $(u, v) = \theta$.

• Si maintenant x et y sont deux vecteurs **non nuls** de E, on appelle **angle orienté des vecteurs** x et y, et on note (x, y), l'angle orienté des vecteurs unitaires associés $u = \dfrac{x}{\|x\|}$ et $v = \dfrac{y}{\|y\|}$. Ainsi, $(x, y) = \theta$ si $r_\theta\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) = \dfrac{y}{\|y\|}$.

• Si u et v sont unitaires, si $(u, v) = \theta$, alors en notant u' le vecteur directement orthogonal à u, $\mathcal{B} = (u, u')$ est une BOND de E dans laquelle v se décompose en $v = (\cos\theta)u + (\sin\theta)u'$, on voit alors que

$$(u|v) = 1 \times \cos\theta + 0 \times \sin\theta = \cos\theta \qquad \text{et} \qquad [u, v] = \det_{\mathcal{B}}(u, v) = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{vmatrix} = \sin\theta\ .$$

• On en déduit que, si x et y sont deux vecteurs non nuls de E, si on pose $\theta = (u, v)$, alors

$$\boxed{(x|y) = \|x\|\,\|y\|\,\cos\theta \qquad \text{et} \qquad [x, y] = \|x\|\,\|y\|\,\sin\theta\ .}$$

5. Classification des isométries vectorielles du plan euclidien.

Étudions maintenant les isométries vectorielles indirectes de E. Si $s \in \mathrm{O(E)} \setminus \mathrm{SO}(E)$, si $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une BOND de E, alors s est représentée dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice de la forme $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. Notons déjà que le calcul donne $S_\theta^2 = I_2$, donc $s^2 = \mathrm{id}_E$, et s est une symétrie. Comme s est aussi une isométrie, c'est donc une symétrie orthogonale (*cf.* exercice proposé dans le paragraphe **I.**). Pour déterminer complètement cette symétrie, il reste donc à rechercher l'ensemble de ses vecteurs invariants. Or, la matrice

$$I_2 - S_\theta = \begin{pmatrix} 1 - \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & 1 + \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,\sin^2\dfrac{\theta}{2} & -2\,\sin\dfrac{\theta}{2}\,\cos\dfrac{\theta}{2} \\ -2\,\sin\dfrac{\theta}{2}\,\cos\dfrac{\theta}{2} & 2\,\cos^2\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

est de rang 1, et admet pour noyau la droite engendrée par le vecteur $u = \left(\cos\dfrac{\theta}{2}, \sin\dfrac{\theta}{2}\right)$. *Le lecteur se fera un plaisir de vérifier ces affirmations!* On a donc $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) = D_{\theta/2}$, où $D_{\theta/2}$ est la droite vectorielle engendrée par u, c'est-à-dire la droite faisant avec le premier vecteur e_1 de la base $\mathcal{B}$ un angle $\dfrac{\theta}{2}$. L'isométrie s est donc la symétrie orthogonale par rapport à cette droite, i.e. la réflexion d'axe $D_{\theta/2}$.

Bilan. Dans un plan euclidien orienté,

- les isométries directes sont les rotations, elles sont caractérisées par la mesure d'un angle, i.e. par la donnée d'un réel modulo 2π ;

- les isométries indirectes sont les réflexions, i.e. les symétries orthogonales par rapport à des droites.

V. Isométries vectorielles en dimension 3.

Dans tout ce paragraphe, E est un espace euclidien orienté de dimension 3.

1. Notion d'angle géométrique.

Soient x et y deux vecteurs non nuls de E. On appelle **angle géométrique** (ou **écart angulaire**) de x et y l'unique réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos(\theta) = \dfrac{(x|y)}{\|x\|\,\|y\|}$. *Remarquons que le rapport* $\dfrac{(x|y)}{\|x\|\,\|y\|}$ *appartient à l'intervalle* $[-1, 1]$ *d'après Cauchy-Schwarz, d'où l'existence de* θ, ainsi que son unicité si on s'impose de mesurer cet angle dans $[0, \pi]$. On a donc $\theta = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{(x|y)}{\|x\|\,\|y\|}\right)$. En particulier, $\theta = 0$ si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires et de même sens, et $\theta = \pi$ si et seulement s'ils sont colinéaires et de sens contraires.

Il résulte de l'identité de Lagrange qu'on a alors

$$\|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2\,\|y\|^2 - (x|y)^2 = \|x\|^2\,\|y\|^2\,(1 - \cos^2\theta) = \|x\|^2\,\|y\|^2\,\sin^2\theta\,.$$

Comme $\theta \in [0, \pi]$, on a $\sin\theta \geq 0$, on déduit les formules suivantes:

Proposition. Soient x et y deux vecteurs non nuls dans un espace euclidien orienté E de dimension trois, soit $\theta \in [0, \pi]$ leur écart angulaire, on a alors

$$\boxed{(x|y) = \|x\|\,\|y\|\,\cos\theta \qquad \text{et} \qquad \|x \wedge y\| = \|x\|\,\|y\|\,\sin\theta\,.}$$

2. Étude des rotations en dimension trois.

Si r est une isométrie vectorielle directe de E, i.e. $r \in \mathrm{SO}(E)$, nous dirons alors que r est une **rotation**. Nous allons prouver le résultat suivant:

Théorème. Si $r \in \mathrm{SO}(E)$ et $r \neq \mathrm{id}_E$, avec E espace euclidien de dimension trois, alors l'ensemble des vecteurs invariants par r est une droite vectorielle, que nous appellerons axe de la rotation, autrement dit $\dim\big(\mathrm{Ker}(r - \mathrm{id}_E)\big) = 1$.

Preuve. Posons $D = E_1(r) = \mathrm{Ker}(r - \mathrm{id}_E)$. Comme $r \neq \mathrm{id}_E$, nous avons déjà $\dim(D) \neq 3$. Procédons par élimination en montrant que les dimensions 0 et 2 ne sont pas possibles non plus.

Notons A la matrice représentant la rotation r dans une BON $\mathcal{B}$ de E, cette matrice est alors orthogonale directe, i.e. $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, elle vérifie donc $A^\top A = I_3$ et $\det(A) = 1$. Donc

$$\begin{aligned}\det(A - I_3) &= \det(A - A^\top A) = \det\big((I_3 - A^\top)A\big) = \det\big((I_3 - A)^\top A\big)\\ &= \det(I_3 - A)\,\det(A) = \det\big(-(A - I_3)\big) = (-1)^3\,\det(A - I_3)\,.\end{aligned}$$

Donc $\det(A-I_3)=0$*, l'endomorphisme* $r-\mathrm{id}_E$ *n'est donc pas bijectif, et donc pas injectif, son noyau n'est pas réduit à* $\{0_E\}$*, donc* $\dim(D)\neq 0$*.*

Par l'absurde, supposons $\dim(D)=2$*. Soit* (e_1,e_2) *une base orthonormale de* D*, complétons-la en une BON* $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ *de* E*, par exemple en posant* $e_3=e_1\wedge e_2$ *si* E *a été orienté. La matrice* A *de* r *dans cette base est alors orthogonale directe, et de la forme* $A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&b\\0&0&c\end{pmatrix}$ *puisque* $r(e_1)=e_1$ *et* $r(e_2)=e_2$*. L'orthogonalité des vecteurs-colonnes entraîne* $a=0$ *et* $b=0$*. Enfin,* $\det(A)=c=1$*, donc* $A=I_3$ *et* $r=\mathrm{id}_E$*, ce qui est contraire aux hypothèses posées.*

En conclusion, $\dim(D)=1$*.*

Reprenons une rotation r de E, distincte de id_E. Son axe $D=\mathrm{Ker}(r-\mathrm{id}_E)=E_1(r)$ est un sous-espace stable par r. D'après une propriété générale des isométries vectorielles, le plan $P=D^\perp$ est alors aussi stable par r. Notons r_P l'endomorphisme de P induit par la rotation r, c'est alors une isométrie du plan P (comme r conserve la norme des vecteurs, il en est de même de sa restriction au plan P). On peut préciser que c'est une isométrie directe: en effet, si $\mathcal{B}=(u,v,w)$ est une base orthonormale directe de E adaptée à la décomposition $E=D\oplus P$, alors $D=\mathrm{Vect}(u)$, la famille $\mathcal{C}=(v,w)$ est une base orthonormale du plan P, et comme $r(u)=u$ et que le plan $P=\mathrm{Vect}(v,w)$ est stable par r, la matrice $M=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r)$ est de la forme $M=\begin{pmatrix}1&0_{1,2}\\0_{2,1}&N\end{pmatrix}$ avec $N=\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(r_P)$, donc $1=\det(M)=\det(N)$, ce qui prouve que $N\in\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ et que r_P est une rotation du plan P. D'après le paragraphe sur l'étude des isométries du plan, si on utilise le vecteur u pour orienter l'axe D, et donc la base $\mathcal{C}=(v,w)$ pour orienter corrélativement le plan P, cette rotation r_P du plan P est caractérisée par un angle (réel modulo 2π).

Bilan. Soit E un espace euclidien orienté de dimension trois, soit $r\in\mathrm{SO}(E)\backslash\{\mathrm{id}_E\}$ une rotation de E autre que l'identité. Choisissons un vecteur non nul de l'axe D pour orienter cet axe, ce qui oriente corrélativement le plan orthogonal $P=D^\perp$. Ce plan P est alors stable par r, et l'endomorphisme induit r_P est, dans le plan P ainsi orienté, une rotation qui est caractérisée par un certain angle θ. On dit alors que r est la rotation d'axe D et d'angle θ.

Il faut se souvenir toutefois du fait que, si l'on change l'orientation de la droite D, alors on change aussi l'orientation du plan P, et on change alors le signe de l'angle θ de la rotation.

Il résulte de ce qui a été dit plus haut que **la matrice de la rotation r, dans une base orthonormale directe de E adaptée à la décomposition $E=D\oplus P$ est de la forme**

$$R'_\theta=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\ .$$

On notera que, si une matrice $A\in\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ représente une rotation de l'espace E dans une certaine base orthonormale, alors elle est semblable à la matrice ci-dessus, d'où l'égalité des traces, ce qui permet d'obtenir le cosinus de l'angle de la rotation, donc cet angle au signe près: **si θ est l'angle d'une rotation r de l'espace E, on a donc**

$$\mathrm{tr}(r)=1+2\cos\theta\ .$$

3. Isométries indirectes en dimension trois (HP).

Soit f une isométrie indirecte de E, i.e. $f \in \mathrm{O}(E)$ avec $\det(f) = -1$, posons $r = -f$. Alors $r \in \mathrm{O}(E)$ et $\det(r) = (-1)^3\ \det(f) = +1$, donc r est une rotation. Il existe donc une base orthonormale directe $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de E dans laquelle la matrice de r est de la forme R'_θ ci-dessus, la matrice de $f = -r$ dans la même base est donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = -R'_\theta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} ,$$

en posant $\alpha = \theta + \pi$. En posant $S = \mathrm{diag}(-1, 1, 1)$, on peut noter que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = S\, R'_\alpha = R'_\alpha\, S .$$

Or, S est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la réflexion s de plan $P = \mathrm{Vect}(v, w)$. On en déduit que f est la “composée commutative” de cette réflexion s et de la rotation r_1 d'axe $D = \mathrm{Vect}(u)$ et d'angle α, i.e. $f = s \circ r_1 = r_1 \circ s$.

Dans le cas où $\alpha = 0$ modulo 2π, cette rotation r_1 est l'identité, et f est simplement la réflexion de plan P.

Dans le cas où $\alpha = \pi$ modulo 2π, on a simplement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = -I_3$, donc $f = -\mathrm{id}_E$ est l'homothétie de rapport -1.

Bilan. Les isométries indirectes de l'espace euclidien de dimension 3 sont:

- les réflexions (symétries orthogonales par rapport à un plan) ;

- les “antirotations”, i.e. les composées commutatives d'une rotation avec une réflexion dont le plan est orthogonal à l'axe de la rotation.

Remarque. Si f est une isométrie de E avec $\dim(E) = 3$, on peut déterminer la nature géométrique de f en étudiant la dimension de l'espace des vecteurs invariants, c'est-à-dire du sous-espace $V = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = E_1(f)$. En effet,

- si $\dim(V) = 3$, alors $f = \mathrm{id}_E$;

- si $\dim(V) = 2$, alors f est une réflexion, c'est la réflexion de plan V ;

- si $\dim(V) = 1$, alors f est une rotation (différente de id_E), on la détermine complètement en précisant son axe (qui est alors V) et son angle, que l'on détermine (au signe près) en utilisant la trace ;

- si $\dim(V) = 0$, alors f est une antirotation.

VI. Endomorphismes autoadjoints. Théorème spectral.

1. Endomorphismes autoadjoints.

Définitions. Soit E un espace euclidien, soit u un endomorphisme de E. On dit que u est **autoadjoint** (ou **symétrique**) si on a

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad \big(u(x)|y\big) = \big(x|u(y)\big) .$$

On dit que u est **antisymétrique** si on a

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad \big(u(x)|y\big) = -\big(x|u(y)\big) .$$

ATTENTION! On prendra garde de ne pas confondre la notion d'endomorphisme symétrique avec celle de "symétrie" (endomorphisme s tel que $s \circ s = \mathrm{id}_E$). C'est pourquoi on préférera le terme d'endomorphisme autoadjoint.

Exemple 1. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire tel que $(P|Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$.
Soit l'endomorphisme Φ de E défini par

$$\forall P \in E \qquad \Phi(P) = P'' - 2X\,P' \;.$$

Alors Φ est un endomorphisme autoadjoint de E (*preuve laissée au lecteur*).

Exemple 2. Si E est un espace euclidien orienté de dimension 3, si a est un vecteur de E, alors l'endomorphisme f de E défini par $\forall x \in E \quad f(x) = a \wedge x$, est antisymétrique.
En effet, si $x \in E$ et $y \in E$, on a

$$\begin{aligned} \big(f(x)|y\big) &= (a \wedge x|y) \;=\; [a,x,y] \;=\; -[a,y,x] \\ &= -(a \wedge y|x) \;=\; -(x|a \wedge y) \;=\; -\big(x|f(y)\big) \;. \end{aligned}$$

Proposition. Dans un espace euclidien E, un projecteur est un projecteur orthogonal si et seulement s'il est autoadjoint.

Preuve. • *Soit F un s.e.v. de E, soit p_F le projecteur orthogonal sur F. Si x et y sont deux vecteurs de E se décomposant respectivement en $x = x' + x''$ et $y = y' + y''$ suivant la somme directe $E = F \oplus F^{\perp}$, alors $p_F(x) = x'$, $p_F(y) = y'$, et*

$$\big(p_F(x)|y\big) = (x'|y' + y'') = (x'|y') = (x' + x''|y') = \big(x|p_F(y)\big) \;.$$

Donc l'endomorphisme p_F est autoadjoint.

• *Réciproquement, soit p un projecteur, si p est le projecteur sur F parallèlement à G avec $F \oplus G = E$, si de plus p est autoadjoint, alors en prenant $x \in F$ et $y \in G$, on a $p(x) = x$, $p(y) = 0_E$, donc*

$$(x|y) = \big(p(x)|y\big) = \big(x|p(y)\big) = (x|0_E) = 0 \;.$$

Les sous-espaces F et G sont donc orthogonaux, i.e. $G \subset F^{\perp}$, mais G et $F^{\perp}$ sont tous deux des supplémentaires de F donc ont la même dimension, finalement $G = F^{\perp}$, et p est le projecteur orthogonal sur F.

Passons en revue quelques propriétés élémentaires des endomorphismes symétriques et antisymétriques.

Proposition 1. Si u est un endomorphisme autoadjoint de E euclidien, alors les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

Preuve. Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de u, soit $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$. On a alors $u(x) = \lambda x$, $u(y) = \mu y$, puis

$$\begin{aligned} \big(u(x)|y\big) &= (\lambda x|y) \;=\; \lambda\,(x|y) \\ &= \big(x|u(y)\big) \;=\; (x|\mu y) \;=\; \mu(x|y) \;. \end{aligned}$$

L'égalité $\lambda\,(x|y) = \mu(x|y)$ avec $\lambda \neq \mu$ entraîne l'orthogonalité des vecteurs x et y, ce qu'il fallait prouver.

<u>Proposition 2.</u> Si u est un endomorphisme autoadjoint de E euclidien, si F est un s.e.v. de E stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

Preuve. Soit $x \in F^\perp$, soit $y \in F$. Alors $\big(u(x)|y\big) = \big(x|u(y)\big) = 0$ car $u(y) \in F$. On a donc prouvé que $u(x) \in F^\perp$.
Notons que cela reste vrai pour un endomorphisme u antisymétrique.

<u>Proposition 3 et notation.</u> L'ensemble des endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, on le note $\mathcal{S}(E)$.

Vérification immédiate.

<u>Proposition 4 (HP).</u> Soit u est un endomorphisme antisymétrique de E euclidien, alors sa seule valeur propre possible est 0.

Preuve. Soit λ une valeur propre de u, soit $x \in E$ un vecteur propre associé, alors $u(x) = \lambda x$. Mais, $\lambda\|x\|^2 = (\lambda x|x) = \big(u(x)|x\big) = -\big(x|u(x)\big) = -(x|\lambda x) = -\lambda\|x\|^2$, donc $\lambda\|x\|^2 = 0$ et, comme x n'est pas le vecteur nul, $\lambda = 0$.

2. <u>Matrices symétriques réelles.</u>

<u>Quelques rappels.</u> Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **symétrique** lorsque $A^\top = A$, i.e. lorsque $a_{j,i} = a_{i,j}$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

Elle est dite **antisymétrique** lorsque $A^\top = -A$, i.e. lorsque $a_{j,i} = -a_{i,j}$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ (ce qui entraîne au passage que ses coefficients diagonaux sont nuls).

L'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques d'ordre n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$. L'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques d'ordre n est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, mais de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Les deux sous-espaces mentionnés ci-dessus sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) .$$

Cela signifie concrètement que, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut la décomposer de façon unique en $M = S + A$ avec S symétrique et A antisymétrique. Cette décomposition est donnée par $S = \dfrac{1}{2}(M+M^\top)$ (partie symétrique de M), $A = \dfrac{1}{2}(M-M^\top)$ (partie antisymétrique de M).

Bien évidemment, ces matrices ont des liens avec les endomorphismes du même nom. Plus précisément,

<u>Proposition.</u> Soit E un espace euclidien, soit u un endomorphisme de E, soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Alors l'endomorphisme u est autoadjoint (ou symétrique) si et seulement si la matrice $A = \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(u)$ est symétrique. On peut bien sûr remplacer "symétrique" par "antisymétrique".

Preuve. Posons $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(u) = A = (a_{i,j})$, on sait que $a_{i,j} = \big(e_i|u(e_j)\big)$ pour tout couple (i,j).

- *Si l'endomorphisme u est symétrique (i.e. autoadjoint), alors en particulier*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad \big(e_i|u(e_j)\big) = \big(u(e_i)|e_j\big) = \big(e_j|u(e_i)\big) ,$$

donc $a_{i,j} = a_{j,i}$ et la matrice A est symétrique.

• *Supposons A symétrique, i.e. $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout couple (i,j), i.e. $\big(e_i|u(e_j)\big) = \big(e_j|u(e_i)\big)$ pour tout (i,j). Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ sont deux vecteurs de E, on a alors*

$$\begin{aligned} \big(u(x)|y\big) &= \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) \mid \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\Big) = \sum_{i,j} x_i y_j \,\big(u(e_i)|e_j\big) \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j \,\big(e_i|u(e_j)\big) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mid \sum_{j=1}^{n} y_j u(e_j)\Big) \\ &= \big(x|u(y)\big)\ , \end{aligned}$$

donc l'endomorphisme u est symétrique (i.e. autoadjoint). Preuve analogue pour antisymétrique.

3. <u>Le théorème spectral.</u>

<u>Théorème spectral, version 1.</u> Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres.

Une preuve est donnée dans le paragraphe suivant.

<u>Commentaire.</u> Autrement dit, si $u \in \mathcal{S}(E)$ avec E euclidien, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E dans laquelle u est représenté par une matrice diagonale.

En conséquence, un tel endomorphisme u est diagonalisable, donc E est la somme (toujours directe) des sous-espaces propres de u et, de plus, les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux (*c'est une conséquence de cette version 1 du théorème spectral, mais aussi plus simplement de la "proposition 1" du paragraphe* **VI.1.** *ci-dessus*). On peut donc énoncer:

<u>Théorème spectral, version 2.</u> Si u est un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E, alors E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u:

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}} E_\lambda(u)\ .$$

En voici une troisième et dernière, qui est la forme matricielle:

<u>Théorème spectral, version 3.</u> Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle, il existe une matrice diagonale réelle D et une matrice orthogonale $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Preuve. En effet, notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A. Si $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique, la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ étant orthonormale, cet endomorphisme est alors autoadjoint, on peut donc lui appliquer la version 1 du théorème spectral. Soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de f, soient λ_1, $\cdots$, λ_n les valeurs propres associées. On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = A$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Les formules de changement de base donnent la relation $A = PDP^{-1}$, où $P = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}$ est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à la base orthonormale $\mathcal{B}$ de vecteurs propres. Cette matrice de passage P est orthogonale car les bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ sont toutes deux orthonormales.

Commentaire. La matrice de passage P de l'énoncé précédent étant orthogonale, la relation $A = PDP^{-1}$ peut aussi s'écrire $A = PDP^{\top}$.

Commentaire. On énonce souvent le résultat en disant que **toute matrice symétrique réelle est diagonalisable, à l'aide d'une matrice de passage orthogonale.**

Attention! Une matrice symétrique complexe n'est pas toujours diagonalisable. Par exemple, la matrice symétrique $S = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ admet 0 comme valeur propre double, et n'est pas la matrice nulle, elle n'est donc pas diagonalisable.

4. **Une preuve du théorème spectral.**

Commençons par énoncer et prouver un lemme utile:

Lemme. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Alors A admet au moins une valeur propre réelle, i.e. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, et de plus toutes les valeurs propres de A sont réelles, i.e. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$.

Preuve. Déjà, A admet au moins une valeur propre complexe, c'est une conséquence du théorème de d'Alembert-Gauss puisque son polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$.

De plus, si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre complexe de A, il existe $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$. En conjuguant cette relation, comme la matrice A est réelle ($\overline{A} = A$), il vient $A\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$, puis $X^{\top} A\,\overline{X} = X^{\top}\,\overline{\lambda}\,\overline{X}$, i.e. puisque A est symétrique, $(AX)^{\top}\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,X^{\top}\,\overline{X}$, soit $(\lambda X)^{\top}\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,X^{\top}\,\overline{X}$, donc $\lambda\,X^{\top}\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,X^{\top}\,\overline{X}$. Or, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a $X^{\top}\,\overline{X} = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{x_k} = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 > 0$ puisque X n'est pas le vecteur nul de $\mathbb{C}^n$. On déduit donc que $\lambda = \overline{\lambda}$, i.e. $\lambda \in \mathbb{R}$.

Commentaire. Dans cette preuve, on a utilisé la notation $\overline{A}$ pour le conjugué d'une matrice A (quel que soit son format), i.e. si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, on pose $\overline{A} = (\overline{a_{i,j}}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. Des propriétés de la conjugaison des nombres complexes (le conjugué d'une somme est la somme des conjugués, le conjugué d'un produit est le produit des conjugués), on déduit facilement que, si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{C})$, alors $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$, ce qui justifie les calculs ci-dessus.

Prouvons maintenant le théorème spectral (version 1) lui-même.

Preuve. On procède par récurrence sur $n = \dim(E)$.

Pour $n = 1$, c'est évident.

Soit $n \geq 2$, supposons la propriété vraie au rang $n-1$ (i.e. tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien de dimension $n-1$ admet une base orthonormale de vecteurs propres). Soit alors E un espace euclidien de dimension n, et $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. D'après le lemme ci-dessus, u admet au moins une valeur propre, il existe donc un vecteur propre associé e_1, que l'on peut toujours choisir unitaire quitte à le diviser par sa norme. La droite $D = \mathrm{Vect}(e_1)$ est stable par u, donc l'hyperplan $H = D^{\perp}$ est aussi stable par u (proposition 2 du paragraphe 1 ci-dessus). Or, l'endomorphisme u_H de H induit par u est autoadjoint dans l'espace euclidien H de dimension $n-1$, donc (hypothèse de récurrence) il existe une base orthonormale $(e_2, \cdots, e_n)$ de H constituée de vecteurs pro-

pres de u_H (donc de u), et $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est alors une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de u.

5. <u>Caractères positif, défini positif.</u>

<u>Définitions.</u> Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E.

On dit que u est **positif** si on a

$$\forall x \in E \qquad \big(u(x)|x\big) \geq 0 \; .$$

On dit que u est **défini positif** si on a

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\} \qquad \big(u(x)|x\big) > 0 \; .$$

<u>Commentaire.</u> Il est clair que "défini positif" entraîne "positif".

<u>Commentaire.</u> Le lien est immédiat avec le vocabulaire analogue utilisé pour les formes bilinéaires symétriques, notamment en vue de définir la notion de produit scalaire. En effet, si $u \in \mathcal{S}(E)$, l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad \varphi(x,y) = \big(u(x)|y\big)$$

est clairement une forme bilinéaire symétrique sur E. Le caractère positif de l'endomorphisme autoadjoint u traduit le fait que cette forme est positive, i.e. $\forall x \in E \quad \varphi(x,x) \geq 0$.

Le caractère défini positif de l'endomorphisme autoadjoint u traduit le fait que cette forme est définie positive, autrement dit que φ est un produit scalaire sur E. Ce dernier résultat pouvant s'avérer utile pour traiter des exercices, je le réécris sou forme de "proposition":

<u>Proposition.</u> Soit u un endomorphisme autoadjoint défini positif d'un espace euclidien E. Alors l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x,y) = \big(u(x)|y\big)$ est un produit scalaire sur E.

<u>Notations.</u> L'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs d'un espace euclidien E est noté $\mathcal{S}^+(E)$, celui des endomorphismes autoadjoints définis positifs est noté $\mathcal{S}^{++}(E)$.

<u>Attention!</u> Ces ensembles ne sont évidemment pas des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{S}(E)$.

<u>Caractérisation spectrale.</u> Un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E est positif si et seulement si ses valeurs propres sont toutes positives ou nulles, il est défini positif si et seulement si ses valeurs propres sont toutes strictement positives. Autrement dit, si $u \in \mathcal{S}(E)$, on a les équivalences:

$$u \in \mathcal{S}^+(E) \iff \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+ \; ;$$
$$u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^* \; .$$

Preuve. • *Le sens direct est facile: soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de u, il existe alors $x \in E$, non nul, tel que $u(x) = \lambda x$. Par hypothèse, on a $\big(u(x)|x\big) \geq 0$, soit $(\lambda x|x) \geq 0$, soit $\lambda \, \|x\|^2 \geq 0$ et, comme x est non nul, on déduit $\lambda \geq 0$. Donc $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$. On obtient de même que, pour $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$, on a $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.*

• *Réciproquement, soit $u \in \mathcal{S}(E)$ tel que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de u, avec $n = \dim(E)$, les λ_i ne sont donc pas nécessairement distincts mais sont tous positifs ou nuls. On sait qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E constituée* *de vecteurs propres de u, et on peut la construire de façon que chaque e_i soit vecteur propre associé à la valeur propre λ_i, $1 \leq i \leq n$. Soit $x \in E$, on le décompose dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a alors $u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, u(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$, puis*

$$\big(u(x)|x\big) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i \mid \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq 0\ .$$

L'endomorphisme autoadjoint u est donc positif.
On montre de même que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$ *entraîne* $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$.

<u>Intermède.</u> Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont deux matrices-colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors l'expression $X^\top AY$ est un réel, et on a

$$X^\top AY = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i y_j\ .$$

<u>Définitions.</u> Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

On dit que A est **positive** si on a

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad X^\top AX \geq 0\ .$$

On dit que A est **définie positive** si on a

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \qquad X^\top AX > 0\ .$$

<u>Commentaire.</u> C'est bien sûr la traduction matricielle de ce qui précède. En effet, une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ représente canoniquement un endomorphisme u_A de $\mathbb{R}^n$, qui est autoadjoint pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. La matrice A est alors positive *si et seulement si* l'endomorphisme u_A est positif, elle est définie positive *si et seulement si* l'endomorphisme u_A est défini positif.

<u>Notations.</u> L'ensemble des matrices symétriques positives (réelles, carrées d'ordre n) est noté $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, celui des matrices symétriques définies positives est noté $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Ces ensembles ne sont évidemment pas des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Comme pour les endomorphismes autoadjoints, on a la

<u>Caractérisation spectrale.</u> Une matrice symétrique réelle est positive si et seulement si ses valeurs propres sont toutes positives ou nulles, elle est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont toutes strictement positives. Autrement dit, si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a les équivalences:

$$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+\ ;$$
$$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*\ .$$

<u>Un approfondissement utile.</u> Si u est un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E, si α est la plus petite valeur propre de u et β sa plus grande valeur propre, alors on a l'encadrement

$$\forall x \in E \qquad \alpha \, \|x\|^2 \leq \big(u(x)|x\big) \leq \beta \, \|x\|^2 \; .$$

En effet, l'endomorphisme $v = u - \alpha \, \mathrm{id}_E$ *est autoajoint, et ses valeurs propres sont positives puisque* $\mathrm{Sp}(v) = \big\{\lambda - \alpha \; ; \; \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\big\}$, *donc par la caractérisation spectrale on déduit que* $v \in \mathcal{S}^+(E)$, *donc*

$$\forall x \in E \qquad \big(v(x)|x\big) = \big(u(x) - \alpha \, x \mid x\big) = \big(u(x)|x\big) - \alpha \, \|x\|^2 \geq 0 \; ,$$

soit $\big(u(x)|x\big) \geq \alpha \, \|x\|^2$. *On obtient de même l'autre inégalité en considérant* $w = \beta \, \mathrm{id}_E - u$.
Voici une traduction matricielle: soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, soient α et β sa plus petite et sa plus grande valeurs propres, alors

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \alpha \; X^\top X \leq X^\top S X \leq \beta \; X^\top X \; .$$

Cas de la dimension deux. Le lecteur vérifiera rapidement que, si λ et μ sont deux réels, alors on a les équivalences

$$\begin{cases} \lambda > 0 \\ \mu > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu > 0 \\ \lambda\mu > 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \lambda \geq 0 \\ \mu \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu \geq 0 \\ \lambda\mu \geq 0 \end{cases} \; .$$

La trace et le déterminant étant des invariants de similitude, on en déduit facilement que, si $S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, alors

$$S \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} \mathrm{tr}(S) > 0 \\ \det(S) > 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad S \in \mathcal{S}_2^{+}(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} \mathrm{tr}(S) \geq 0 \\ \det(S) \geq 0 \end{cases} \; .$$