

PRÉPARATION À L'ORAL DE MATHÉMATIQUES

PSI 2 2025

Centrale Math 1

Centrale 1 (Edward CHARBONNIER)

- On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit p le projecteur sur $\text{Vect}(e_1)$ parallèlement à $\text{Vect}(e_1 + e_2)$.
 - Donner la matrice A canoniquement associée à p .
 - Trouver toutes les matrices B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = B$.
- Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie. Pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, on pose $\psi_f(g) = f \circ g - g \circ f$. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\psi_f(g) = g$.
 - Montrer que, pour tout entier naturel k , on a $\psi_f(g^k) = k g^k$.
 - En déduire que l'endomorphisme g est nilpotent.

Centrale 2 (Raphaël JOHNSON)

- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq 1 + x$.
- Montrer qu'il existe une unique fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$(*) : \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = -1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi''(x) = |\varphi(x) + e^x|.$$

Centrale 3 (Mélissa CHERFAOUI et Bastien LACROIX)

- On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}$. Quel est le rayon de convergence R de cette série entière ?
Montrer que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Une particule se déplace sur l'axe des réels. À l'instant $t = 0$, elle est à l'origine (abscisse 0). À chaque instant k entier naturel non nul, elle avance de 1 (on pose alors $X_k = 1$) ou recule de 1 (on pose alors $X_k = -1$), de façon équiprobable et indépendante. On admet que l'on définit ainsi une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.
 - Déterminer la loi de $Y_k = \frac{1 - X_k}{2}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, puis celle de $Z_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
 - En déduire la loi de S_n , son espérance et sa variance.
- On note $T = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$ le temps d'attente du premier retour à l'origine et on admet qu'il s'agit d'une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. On pose $p_0 = 1$, $q_0 = 0$ et, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = P(S_n = 0)$ et $q_n = P(T = n)$. On considère les fonctions

$$F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n \quad \text{et} \quad G : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n.$$

- Calculer $F(x)$ en précisant le domaine de validité.
- Prouver, pour $n \geq 1$, la relation $p_n = \sum_{k=0}^n q_k p_{n-k}$.

c. Montrer que la fonction G est définie et continue sur $[-1, 1]$, et donner une expression de $G(x)$ en utilisant **b**.

d. De ce qui précède, déduire que $P(T = +\infty) = 0$.

Questions de cours. CNS pour qu'une matrice soit diagonalisable, formule de Taylor-Young.

Centrale 4 (Maëlys NORMAND)

1. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E , tel que $\text{Sp}(u) = \{\lambda, \mu\}$ avec $\lambda \neq \mu$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement s'il existe deux projecteurs p et q tels que $p + q = \text{id}_E$ et $\lambda p + \mu q = u$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $a \neq 0$. Montrer que A admet deux valeurs propres et qu'elle est diagonalisable.

Il y avait d'autres questions.

Question de cours. Inégalité de Markov.

Centrale 5 (Céleste PUGNIÈRE)

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite à **diagonale propre** si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et si ses coefficients diagonaux sont ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicité).

1. Pour $n = 2$, à quelle condition la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est-elle à diagonale propre ?
 2. Déterminer les matrices symétriques réelles qui sont à diagonale propre.
 3. Quelles sont les matrices antisymétriques réelles à diagonale propre ?
-

Centrale 6 (Raphaël BESSONE)

1. Montrer la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$.

On posera $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ pour tout n entier naturel.

2. Montrer que $R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx$.

3. Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} R_n$.

4. Calculer $S = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.

Centrale 7 (Inès AÏT BRAHAM)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, soit $u : E \rightarrow E$ défini par $u(P) = Q$ avec $Q(X) = P(X + 1)$, soit $v = u - \text{id}_E$.

1. Montrer que v est un endomorphisme de E . Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v^n(P) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X + k).$$

2. Soient n et p entiers naturels avec $p < n$. Prouver que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^p = 0.$$

3. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n$.

4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(a + kh).$$

Concours Mines-Ponts

CCMP 1 (Inès AÏT BRAHAM)

Exo 1. (15 min. de préparation). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $M = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

- a. Exprimer $\det(M)$ en fonction de $\det(A)$.
- b. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Exo 2.a. Soit $a \in]0, 1]$. Montrer que $x \mapsto \frac{(-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}}{x}$ est continue par morceaux sur $[a, 1]$.

- b. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{(-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}}{x} dx$ est convergente.

$$\text{Indication: Pour } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on calculera } I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{(-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}}{x} dx.$$

CCMP 2 (Alice PONCHEL)

Exo 1. (15 min. de préparation).

Soit E l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on note $K(f)$ le plus petit réel positif k tel que f soit k -lipschitzienne sur $[0, 1]$.

- a. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- b. Justifier l'existence de $K(f)$ pour tout $f \in E$.
- c. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Montrer que $f \in E$ et déterminer $K(f)$.
- d. L'application $K : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est-elle une norme ?

Exo 2. Pour quelles valeurs du nombre complexe k la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Indication: on pourra montrer que $\chi_A = X^2(X - \lambda)(X - \mu)$ avec $\begin{cases} \lambda + \mu = k \\ \lambda^2 + \mu^2 = k^2 + 6 \end{cases}$.

CCMP 3 (Baptiste VINET)

Exo 1. Soient A et B deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'endomorphisme $u_{A,B}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad u_{A,B}(M) = AMB.$$

- Montrer que $u_{A,B}$ est l'endomorphisme nul si et seulement si $A = 0_n$ ou $B = 0_n$.
- Montrer que l'endomorphisme $u_{A,B}$ est nilpotent si et seulement si A ou B est nilpotente.
- Soient $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (X_i Y_j^\top)_{(i,j) \in [1,n]^2}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Montrer que, si A et B sont diagonalisables, alors l'endomorphisme $u_{A,B}$ est diagonalisable.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable (sur $\mathbb{R}$), mais que l'endomorphisme $u_{A,A}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

Exo 2.a. Résoudre, sur $] -1, 1[$, l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}) : (1 - t^2)y'' - 2ty' = 0.$$

- Trouver les fonctions $f :] -1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telles qu'en posant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \quad g(x, y) = f\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right),$$

la fonction g ait un laplacien nul.

CCMP 4 (Edward CHARBONNIER)

Exo 1. Soit l'équation différentielle **(E)**: $xy'' + y' + y = 0$.

- Montrer que **(E)** admet une unique solution développable en série entière vérifiant $y(0) = 1$, on notera f cette solution. Déterminer f et préciser le rayon de convergence de la série entière.
- On pose $g(x) = x f'(x)^2 + f(x)^2$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exo 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminer son rang. Montrer que A est diagonalisable et construire une base de vecteurs propres.

CCMP 5 (Maëlys NORMAND)

Exo 1. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [0, 1] \quad \tilde{f}(x) = \int_0^1 \min\{x, t\} f(t) dt .$$

Soit l'application $F : f \mapsto \tilde{f}$.

- a. Montrer que F est un endomorphisme de E .
- b. Montrer que, pour tout $f \in E$, l'application $\tilde{f} = F(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$, expliciter $(\tilde{f})'(x)$ et $(\tilde{f})''(x)$. On calculera $\tilde{f}(0)$ et $(\tilde{f})'(1)$.
- c. Déterminer les éléments propres de F .

Exo 2. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

- a. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2 - 1} dt$ est convergente.
- b. Montrer que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
- c. Calculer I .

Concours Mines-Télécom**CMT 1 (Hasna BENALI)**

Exo 1. Soit la série entière $\sum_{n \geq 0} \ln(n+1) x^n$, on note $S(x)$ sa somme en cas de convergence.

- a. Quel est le rayon de convergence R ?
- b. Vérifier la relation $\forall x \in]-1, 1[\quad (1-x) S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n$.
- c. On pose $U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right) x^n$. Montrer que la fonction U est définie et continue sur $[-1, 1]$.
- d. Exprimer $S(x)$ en fonction de $U(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.
- e. En déduire le comportement asymptotique (limite éventuelle ou équivalent) de $S(x)$ lorsque $x \rightarrow 1^-$ et lorsque $x \rightarrow (-1)^+$.

Exo 2. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension trois, soit $f \in \mathcal{L}(E)$, supposé non diagonalisable, tel que $(f^2 + \text{id}_E) \circ (f - \text{id}_E) = 0$.

- a. Montrer que $\text{Ker}(f^2 + \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - \text{id}_E) = E$.
- b. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle l'endomorphisme f est représenté par la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

CMT 2 (Inès TAGLIAFERRI)

Exo 1.a. Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, continue et bornée. Montrer que les intégrales $I = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx$

et $J = \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 + 1} dx$ convergent et ont la même valeur.

b. Calculer $A = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)}$ et $B = \int_0^{+\infty} \frac{x^n dx}{(1+x^2)(1+x^n)}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exo 2. Soit E un espace euclidien.

- a.** Soient u et v deux vecteurs non nuls de E . À quelle condition sur le produit scalaire $(u|v)$ l'angle des vecteurs u et v est-il obtus ?
- b.** Soit u un vecteur unitaire de E , soit $x \in E$. Donner une expression du projeté orthogonal de x sur l'hyperplan H de vecteur normal u .
- c.** Soient u, v, w trois vecteurs non nuls de E , formant deux à deux des angles obtus, avec u unitaire. On note v' et w' les projetés orthogonaux de v et w respectivement sur l'hyperplan $H = (\text{Vect}(u))^\perp$. Montrer que v' et w' forment un angle obtus.

CMT 3 (Valentin BROCC)

Exo 1. *Je ne suis pas sûr d'avoir bien compris l'énoncé fourni par Valentin, alors je pose un sujet proche, mais peut-être plus difficile.* On considère deux dés à six faces (numérotées de 1 à 6), tous les deux truqués. On note X la variable aléatoire donnant la somme des résultats obtenus lors du lancer simultané de ces deux dés. Est-il possible que X suive la loi uniforme sur $\llbracket 2, 12 \rrbracket$?

Exo 2.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. Préciser $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n$.

b. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)! R_n = 1$.

c. Quelle est la nature de la série $\sum \sin(2n! \pi e)$?

CMT 4 (Raphaël JOHNSON)

Exo 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1]$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{x} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - 1 \right).$$

On pose $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

a. Montrer que l'intégrale I_n est convergente.

b. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \times k!}$.

Exo 2. Soient a et b deux réels, soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $\begin{cases} u : E \rightarrow E \\ M \mapsto aM + bM^\top \end{cases}$.

- Montrer que u est un endomorphisme de E .
- Déterminer ses valeurs propres. Montrer que u est diagonalisable.
- Calculer $\det(u)$ et $\text{tr}(u)$.

CMT 5 (Bastien LACROIX)

Exo 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et T -périodique ($T > 0$), soit a un réel non nul. Montrer que l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}) : y' + ay = f$$

admet une unique solution T -périodique.

Indication: on pourra considérer la fonction $g : x \mapsto e^{-ax} \int_0^x f(t) e^{at} dt$.

Exo 2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Déterminer la loi de $Y = X_1 - X_2$.

CMT 6 (Céleste PUGNIÈRE) (un seul exo récupéré)

Exo 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Justifier que A est diagonalisable.
- Déterminer $\text{rg}(A + I_n)$. En déduire une valeur propre de A et sa multiplicité.
- Déterminer tous les éléments propres de A .
- Trouver un polynôme annulateur de A de degré 2.

CMT 7 (Wassime ATEK)

Exo 1. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Soit l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ u \mapsto \frac{1}{2}(s \circ u + u \circ s) \end{cases}.$$

- Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
- Exprimer $\varphi^3(u)$ pour $u \in \mathcal{L}(E)$. En déduire un polynôme annulateur de φ .
- L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exo 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- Trouver un équivalent de H_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

b. Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum H_n x^n$.

c. Pour $x \in]-R, R[$, exprimer $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$.

CMT 8 (Raphaël BESSONE) (un seul exo récupéré)

Exo 1. Soit $A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ a_n & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit P_n son polynôme caractéristique.

a. Calculer P_2 et P_3 .

b. Déterminer le rang de A_n . En déduire que P_n est divisible par X^{n-2} .

c. Montrer que $P_n = X^{n-2}(X^2 - a_1 X - b_1)$, avec $b_1 = a_2^2 + \cdots + a_n^2$.

d. La matrice A_n est-elle diagonalisable ?

CMT 9 (Thomas TANNEUR)

Exo 1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,i} = 0$, et $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .

Exo 2. On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \ln(t) dt$.

a. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Trouver une équation différentielle satisfaite par F .

c. On pose $\gamma = -F(1)$. Exprimer $F(x)$ pour $x > 0$ à l'aide de γ et de fonctions usuelles.

CMT 10 (Maiwen HAMON)

Exo 1. Soit $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t-1}$.

a. Montrer que $\forall t \in]0, 1[\quad f(t) = - \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln(t)$.

b. Montrer que $\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exo 2. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension trois, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

a. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x, f(x), f^2(x))$ soit une base de E .

b. Montrer qu'il existe une unique droite vectorielle de E stable par f .

CMT 11 (Olivier CHEN)

Exo 1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

- a. Rappeler la fonction génératrice $G_X(t)$.
- b. Montrer que

$$\forall t \in [1, +\infty[\quad P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{G_X(t)}{t^{2\lambda}}.$$

- c. En déduire que $P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$.
- d. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exo 2. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E$ non nul. Pour $x \in E$, on pose $f(x) = x + x \wedge u$.

- a. Montrer que f est un endomorphisme de E et que $\text{Sp}(f) = \{1\}$.
- b. Déterminer le sous-espace propre associé.
- c. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
- d. Est-il inversible ? Sinon, déterminer son rang.

CMT 12 (Wième MATOUSSI)

Exo 1. Soient a et b deux réels, soit u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}[X]$ qui, à tout polynôme P , associe le polynôme

$$Q = (aX + b)P + X(X - 1)P'.$$

Déterminer les éléments propres de u . On s'intéressera à la fonction polynomiale associée à P pour obtenir une équation différentielle.

Exo 2. On pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2x + n}$.

- a. Domaine de définition de S .
- b. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- c. Donner un équivalent de S en $+\infty$.

CCINP

CCINP 1 (Inès TAGLIAFERRI)

Exo 1. (30 min. de préparation + 20 min. de présentation)

Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{n,p} = \int_0^1 x^p (\ln(x))^n dx$. On pose aussi $f(x) = \frac{1}{x^x}$ pour $x \in]0, 1]$.

- a. Vérifier que chaque intégrale $I_{n,p}$ est convergente.
- b. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, prouver la relation $I_{n,p} = -\frac{n}{p+1} I_{n-1,p}$.

c. Vérifier que f est intégrable sur $]0, 1]$.

d. Prouver la relation $\int_0^1 f(x) \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

Exo 2. (sans préparation, 10 min. de présentation)

Énoncé partiellement retenu: il s'agit d'énoncer des conditions pour qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admette des "racines carrées".

CCINP 2 (Raphaël GASC)

Exo 1. Soit (a_n) la suite réelle définie par

$$a_0 = a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2}.$$

a. Montrer que la suite (a_n) est strictement positive.

b. i. Sens de variation de la suite (a_n) .

ii. En déduire la divergence de la série $\sum (a_{n+2} - a_{n+1})$. Limite de la suite (a_n) ?

c. On considère la série entière $\sum a_n x^n$, on note $S(x)$ sa somme.

i. Quel est son rayon de convergence R ?

ii. Montrer que S vérifie, sur $I =]-R, R[$, l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}) : \quad (x-1)y' + (x+1)y = 0.$$

d. En déduire une expression de $S(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

Exo 2.a. Cours: Décomposition d'une matrice carrée comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

b. On considère l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(M) = M - M^\top.$$

Déterminer ses éléments propres. Est-il diagonalisable ? Quelle est sa trace ?

CCINP 3 (Alistair RENAUD)

Exo 1.a. Rayon de convergence et ensemble de définition de la fonction f somme de la série

entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}.$

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $x_n = \int_0^1 (1-t) t^{3n} \, dt$.

c. Exprimer $\sum_{k=0}^{n-1} x_k$ de deux façons différentes.

d. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2}.$

e. Calculer enfin $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$.

Exo 2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\chi_A = \chi_B = P \in \mathbb{R}[X]$.

- On suppose que P admet n racines distinctes. Que peut-on dire des matrices A et B ?
- Trouver deux matrices A et B , non semblables, telles que $\chi_A = \chi_B$.

CCINP 4 (Ahmed SAIED)

Exo 1. Soit $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \int_0^1 |f(t)| \, dt$$

$$N'(f) = \left| \int_0^1 f(t) \, dt \right| + \int_0^1 |f'(t)| \, dt$$

$$N''(f) = \left| \int_0^1 f(t) \, dt \right| + \left| \int_0^1 f'(t) \, dt \right| + \left| \int_0^1 f''(t) \, dt \right|.$$

- Calculer $N(f)$, $N'(f)$ et $N''(f)$ pour $f : t \mapsto \sin(2\pi t)$.
- Les applications N' et N'' sont-elles des normes sur E ?
- Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $\int_0^1 f(t) \, dt = f(c)$.
- Montrer que $\forall f \in E \quad N(f) \leq N'(f)$.
- Les normes N et N' sur E sont-elles équivalentes ?

Exo 2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = I_n$, $M \neq I_n$ et $MM^\top = M^\top M$.

- Montrer que $M^\top M$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
- Montrer que $M \in \text{O}_n(\mathbb{R})$.
- On suppose $n = 3$, déterminer les valeurs propres de M .

CCINP 5 (Ilias TALEB)

Exo 1. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent, soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

- Soient $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ semblables, soit $R \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme. Montrer que les matrices $R(U)$ et $R(V)$ sont semblables.
- Calculer M^2 , M^3 , puis M^k pour k entier naturel. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme. Exprimer la matrice $P(M)$ à l'aide des matrices $P(A)$, $P'(A)$ et B .
- Si A est diagonalisable et $B = 0_n$, montrer que M est diagonalisable.
- Montrer la réciproque de la question c.

Exo 2. a. Cours: rappeler l'énoncé du théorème spécial des séries alternées.

- Nature de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$, avec $a_n = \cos \left(\pi n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$.

CCINP 6 (Valentin BROCC)

Exo 1. Soit $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) g(t) dt .$$

On considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{f \in E \mid \forall x \in [0, 1] \quad f(x) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{f \in E \mid \forall x \in [-1, 0] \quad f(x) = 0\} .$$

- a. Montrer que les sous-espaces F et G sont orthogonaux.
- b. A-t-on $E = F \oplus G$?
- c. Justifier que $G \subset F^\perp$.
- d. (*ne figurait pas dans la planche initiale*). On souhaite maintenant montrer que $G = F^\perp$.
On se donne $g \in F^\perp$. En considérant la fonction $u : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, nulle sur $[0, 1]$ et telle que $u(t) = -t g(t)$ pour $t \in [-1, 0]$, montrer que $g \in G$ et conclure.
- e. *En fait, pour conclure que $G = F^\perp$, l'énoncé d'origine proposait une autre méthode, mais qui me semble plus compliquée, la voici :*
Soit $g \in F^\perp$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction de E qui est constante de valeur $g(0)$ sur $\left[-1, -\frac{1}{n}\right]$, qui est affine sur $\left[-\frac{1}{n}, 0\right]$ et qui est nulle sur $[0, 1]$.
 - i. Exprimer $\langle f_n, g \rangle$, puis montrer que $g(0) \int_{-1}^0 g(t) dt = 0$.
 - ii. En considérant la fonction f de E , nulle sur $[0, 1]$ et telle que $f(x) = g(x) - g(0)$ pour tout $x \in [-1, 0]$, conclure.
- f. *Comme cet exercice m'a intéressé, je rajoute une question que cela m'a inspiré.* Montrer que $F \oplus F^\perp$, c'est-à-dire $F \oplus G$, est un hyperplan dense dans l'espace préhilbertien E .

Exo 2. Soit l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}) : \quad x(1-x) y'' + (1-3x) y' - y = 0 .$$

- a. Trouver les solutions de **(E)** développables en série entière.
- b. Pourquoi l'équation **(E)** admet-elle, sur $]0, 1[$, d'autres solutions que celles obtenues ci-dessus ?
- c. Résoudre **(E)** sur $]0, 1[$ en utilisant le changement de fonction inconnue $y(x) = \frac{z(x)}{1-x}$.

CCINP 7 (Pierre-Marie SANTUCCI)

Exo 1. Soit E un espace préhilbertien réel, soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E .
On suppose que les vecteurs e_k sont unitaires et que

$$\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (e_k | x)^2 .$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est une base orthonormale de E .

Exo 2. Soient a et b deux réels strictement positifs.

- a. Montrer que $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$.
- b. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

CCINP 8 (Alice PONCHEL)

Exo 1. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie.

- a. Montrer que, si f est diagonalisable, alors $f^2 = f \circ f$ l'est aussi.
- b. Montrer que, si f est diagonalisable, alors $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$.
- c. Soit λ une valeur propre complexe non nulle de f^2 , soit μ une racine carrée complexe de λ .
Montrer que
$$\text{Ker}(f^2 - \lambda \text{id}_E) = \text{Ker}(f - \mu \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \mu \text{id}_E).$$
- d. Montrer que, si f^2 est diagonalisable et inversible, alors f est aussi diagonalisable et inversible.
- e. On suppose f^2 diagonalisable. Montrer alors que f est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$.

Exo 2. On pose $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(xt)}{t} dt$.

- a. Montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
- b. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- c. Donner l'expression de $g(x)$.

CCINP 9 (Céleste PUGNIÈRE)

Exo 1. Soit f un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ tel que $f^3 = \text{id}_E$ et $f \neq \text{id}_E$.

- a. Montrer que 1 est valeur propre de f .
- b. Montrer que $\text{Ker}(f - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f^2 + f + \text{id}_E) = E$.
- c. Construire une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exo 2. Soit α réel. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et x réel, on pose

$$f_n(x) = x(1 + n^\alpha e^{-nx}).$$

- a. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
- b. Montrer que $g : y \mapsto ye^{-y}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. En déduire la convergence uniforme de (f_n) pour $\alpha < 1$.
- c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.
-

CCINP 10 (Wassime ATEK)

Exo 1. Soit $n \geq 2$, soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ supposés tous les deux non nuls. Pour tout α réel, on pose $M_\alpha = I_n - \alpha XY^\top$. Soit l'ensemble $H = \{M_\alpha ; \alpha \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a. Montrer que l'ensemble H est stable par produit matriciel.
- b. Préciser le rang de $XY^\top$.
- c. Pour quels réels α la matrice M_α est-elle inversible ?
- d. On suppose les vecteurs X et Y non orthogonaux, i.e. $X^\top Y \neq 0$.
 - i. Montrer que $XY^\top$ est diagonalisable.
 - ii. En déduire que M_α est diagonalisable pour tout α réel.

Exo 2. Pour tout $t \in]0, 1]$, on pose $f(t) = e^t \ln(t)$.

- a. Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$.
- b. Montrer que $\int_0^1 f(t) dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \times n!}$.

CCINP 11 (Hasna BENALI)

Exo 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $\varphi_A : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto AM \end{cases}$.

- a. **Cours.** Rappeler une CNS en termes de polynôme annulateur pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable.
- b. Montrer que φ_A est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- c. Montrer que φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.
- d. Montrer que $\text{Sp}(\varphi_A) = \text{Sp}(A)$.
- e. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$, soit $(X_1, \dots, X_k)$ une base de $E_\lambda(A)$. Construire à l'aide des X_i ($1 \leq i \leq k$) une base de $E_\lambda(\varphi_A)$.

Exo 2. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables de Bernoulli de même paramètre $p \in]0, 1[$, soit N une variable géométrique de paramètre p . On suppose que

les X_i et N sont mutuellement indépendantes. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$.

On écrira alors $Y = \sum_{i=1}^N X_i$.

- a. Un entier $n \in \mathbb{N}^*$ étant donné, on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Quelle est la loi de la variable S_n ?

- b. Soit $k \in \mathbb{N}$, soit $x \in]-1, 1[$, donner une expression simple de $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$.

- c. En déduire la loi de Y .
-

CCINP 12 (Raphaël BESSONE)

Exo 1. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n , soit $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Soit l'ensemble

$$\mathcal{C}_u = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}.$$

- a. Montrer que $\mathcal{C}_u$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
- b. Déterminer $\dim(E_{\lambda_k}(u))$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- c. Soit $v \in \mathcal{C}_u$. Montrer que les sous-espaces $E_{\lambda_k}(u)$ sont stables par v .
- d. Soit $v \in \mathcal{C}_u$. Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres communs à u et v .

Exo 2.a. Soit l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln(x)}{(1+x)^2} dx$. Montrer sa convergence.

- b. *Il y avait d'autres questions... Mon logiciel de calcul formel me dit que $I = \pi$, mais je ne sais pas comment le démontrer. Si quelqu'un a une idée...*

CCINP 13 (Maïwen HAMON)

Exo 1. On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

- a. Domaine de définition de f .
- b. Dérivabilité de f et expression de $f'(x)$.

Indication: Pour $x \in \mathbb{R}_+^ \setminus \{1\}$ fixé, rechercher des réels a et b tels que*

$$(*) \quad \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{a}{1+t^2} + \frac{b}{1+x^2t^2}.$$

- c. Expression de $f(x)$.
- d. Calculer $I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t} \right)^2 dt$.

Exo 2. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E . On suppose que u admet un polynôme annulateur $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que 0 soit racine simple de P .

- a. Interpréter "0 est racine simple de P " avec les coefficients de P .
- b. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u^2)$.
- c. Montrer que $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(u^2)$.
- d. Montrer que $\operatorname{Im}(u)$ et $\operatorname{Ker}(u)$ sont en somme directe.

CCINP 14 (Albert WLODKOWSKI)

Exo 1. Une puce se déplace entre trois points notés A, B, C . À l'instant $t = 0$, elle se trouve au point A . À chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$, elle saute de façon équiprobable, sur l'un des deux points en lesquels elle ne se trouvait pas à l'instant $n - 1$.

Pour tout n entier naturel, on note A_n la probabilité que la puce se trouve au point A à l'instant n , et de même on définit B_n et C_n .

On introduit les matrices $I = I_3$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = J - I$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit la matrice-colonne $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$.

- Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n .
- Montrer que M est diagonalisable, donner ses éléments propres. Dédire le calcul de M^n .
- Expliciter $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$ en fonction de n .
- Trouver un polynôme annulateur de J . Calculer le reste de la division euclidienne de $(X-1)^n$ par $X(X-3)$. Retrouver ainsi les expressions de $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$ en fonction de n .

Exo 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

- Prouver l'existence de R_n pour tout n , et montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$.
- Soit $v_n = \frac{(-1)^n}{n} R_n$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge.
- Nature de la série $\sum_{n \geq 1} w_n$, avec $w_n = (-1)^n \frac{S_n}{n}$.
- Nature de la série $\sum_{n \geq 1} x_n$, avec $x_n = \frac{S_n}{n}$.

CCINP 15 (Olivier CHEN)

Exo 1. On pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

- Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer $f'(x)$.
- Montrer que $\forall x > 0 \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}$.
 - Montrer que $\forall x > 0 \quad f(x) = -e^{-x} \ln(x) + \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$.
 - Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Calculer $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ par une intégration par parties.

Exo 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A et $A^\top$ commutent.

- Montrer que $\text{Ker}(A^\top) = \text{Ker}(A)$.
- Montrer que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(A) \oplus \text{Im}(A)$.

CCINP 16 (Wième MATOUSSI)

Exo 1. Soit u un endomorphisme non nul de $E = \mathbb{R}^3$ vérifiant $u^3 = -u$.

- Montrer que $\text{Im}(u^2 + \text{id}_E) \subset \text{Ker}(u)$.
- En déduire que $E = \text{Ker}(u^2 + \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(u)$.
- Montrer que $\text{Sp}(u) = \{0\}$ et que $\text{Ker}(u^2 + \text{id}_E) \neq \{0_E\}$.
- Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exo 2.a. Montrer que l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx$ est convergente.

- Montrer que $J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$.

CCINP 17 (Inès AÏT BRAHAM)

Exo 1. Soit $f : \begin{cases} [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x} + \cos(x)} \end{cases}$.

- Donner des réels a, b, c, d tels que, au voisinage de $+\infty$, on ait

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sin(x)} f(x) = a + b u(x) + c u(x)^2 + d u(x)^3 + o(u(x)^3) \quad \text{avec} \quad u(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{x}}.$$

- Étudier les convergences des intégrales suivantes:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x}} dx; \quad J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x) \cos(x)}{(\sqrt[3]{x})^2} dx; \quad K = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x) \cos^2(x)}{x} dx.$$

- En déduire la convergence de $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Exo 2. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels distincts. Montrer que

$$\varphi : (P, Q) \mapsto (P|Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k) Q(a_k)$$

définit un produit scalaire sur E .

- Soit $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0 \right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

Préciser sa dimension et son orthogonal.

- Calculer la distance de X^n à F .

ENSEA

ENSEA 1 (Ilias TALEB)

Exo 1. Pour tout $a \in \mathbb{R}^3$, on définit $f_a : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x \mapsto x + a \wedge x \end{cases}$.

a. Vérifier que, si a, b, c sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on a

$$a \wedge (b \wedge c) = (a|c) b - (a|b) c.$$

b. Montrer que f_a est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

c. Trouver une CNS pour que f_a soit diagonalisable.

Exo 2.a. Montrer que $\operatorname{Arccos}(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$. **b.** Nature de la série $\sum \operatorname{Arccos}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+3}\right)$.

ENSEA 2 (Catherine KUCZ)

Exo 1. Soit E un espace euclidien, soient a et b deux vecteurs unitaires de E , non colinéaires.

Pour $x \in E$, on pose $f(x) = (a|x) b + (b|x) a$.

a. Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de E .

b. Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$.

c. Calculer $f(a+b)$ et $f(a-b)$. En déduire une diagonalisation de f .

Exo 2. Pour $n \geq 2$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

ENSEA 3 (Olivier CHEN)

Exo 1. Soit $a \in]1, +\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_1^a (\ln(t))^n dt$.

a. Étudier $f_n : t \mapsto (\ln(t))^n$ sur $[1, +\infty[$.

b. Pour quels réels $t \geq 1$ a-t-on $|f_n(t)| > 1$?

c. On suppose $a \neq e$. Étudier la nature de la série $\sum u_n$.

d. On suppose $a = e$. Étudier la nature de la série $\sum u_n$. On recherchera un équivalent de u_n .

Exo 2. Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, inversible, telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0_5$ et $\operatorname{tr}(A) = 8$.

a. Montrer que A est diagonalisable.

b. Quelle conséquence chacune des hypothèses suivantes a-t-elle sur les valeurs propres de A ?

i. $A^3 - 3A^2 + 2A = 0_5$;

ii. A est inversible ;

iii. $\operatorname{tr}(A) = 8$.

c. Déterminer $D \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ diagonale telle que A soit semblable à D .

d. Déterminer tous les polynômes annulateurs de A .