Test oscillateur harmonique

Sujet A

Exercice 1: solution d'une équation différentielle.

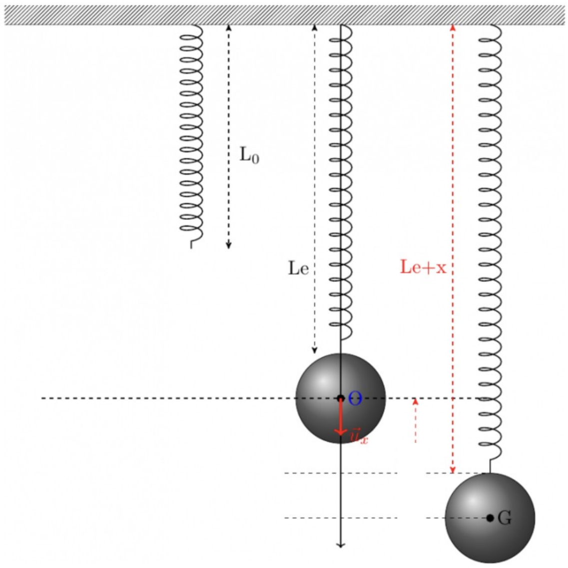
Un oscillateur harmonique est régi par l'équation différentielle:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_o^2 x=0 \quad \text{avec } \omega_0 = 3{,}0\ rad.s^{-1}.$$

Initialement (à t = 0), on a $x(0) = a = 50\ cm$ et $v(0) = v_0 = 2{,}0\ m.s^{-1}$.

Résoudre l'équation différentielle (solution : x(t)).

Exercice 2 : ressort vertical



Un ressort de raideur $k = 10\ N.m^{-1}$ et de longueur à vide $l_0 = 30$ cm est accroché au plafond.

On suspend une masse m = 100 g à l'extrémité du ressort.

1) Quelle sera la longueur du ressort **à l'équilibre**, notée l_{eq} ? (n'oubliez pas de faire un schéma sur lequel figurent les forces appliquées à la masse).

2) On étire à présent le ressort d'une distance $\mathbf{x_0 = 20\ cm}$ par rapport à sa position d'équilibre puis on le lâche **sans vitesse initiale.**

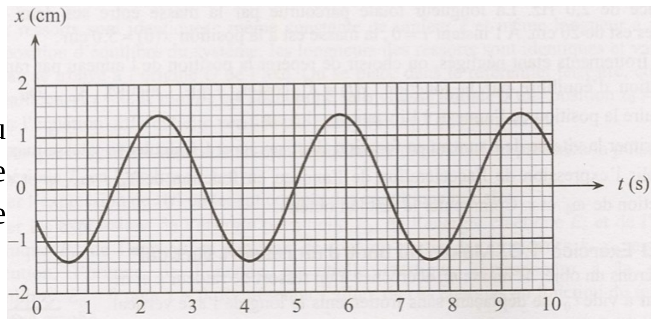
Montrer que l'équation différentielle satisfaite par $x(t) = l - l_{eq}$ (les frottements de l'air sont négligés) est de la forme $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_o^2 x=0$.

Indication : utiliser le résultat de la question 1 pour simplifier l' équation différentielle.

3) Résoudre cette équation différentielle. Quelle est la période des oscillations du ressort ?

Exercice 3 : analyse de données expérimentales :

En mesurant l'abscisse x(t) d'une masse accrochée au bout d'un ressort linéaire horizontal, repérée par rapport à sa position d'équilibre, on obtient le graphe suivant :



1) Déterminez les caractéristiques de l'oscillation : amplitude, période, vitesse initiale.

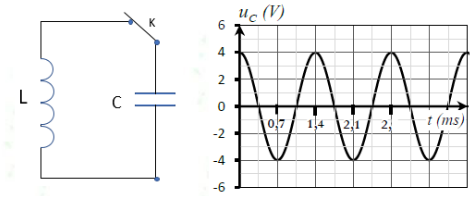
2) L'objet accroché au ressort est de masse m = 50 g. En déduire la valeur de la constante de raideur k du ressort.

3) Donner l'expression de l'énergie potentielle élastique.

Exercice 4

Soit un condensateur de capacité C= 10 µF , initialement chargé sous une tension d'un générateur idéal de tension continue E. À un instant t = 0, on relie le condensateur aux bornes d'une bobine d'inductance L considérée comme idéale (résistance interne r nulle) , on obtient un circuit LC idéal comme dans la figure 1 ci-dessous.

On visualise la tension u_C aux bornes du condensateur (Figure ci-dessous).



Reprendre le circuit électrique utilisé et représenter dans la convention « récepteur », le sens du courant électrique, la tension aux bornes de chaque composant électrique.

2- Établir l'équation différentielle qui régit les variations de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

3- Trouver la solution de l'équation différentielle, déterminer l'expression de la période propre T_0 du circuit LC en fonction des paramètres L et C,

4– Relever graphiquement la période des oscillations de la tension u_C, en déduire l'inductance L de la bobine.

5- Calculer la quantité d'électricité Q_m du condensateur. (La condition initiale sur u_C).

6- Comme la charge dans le condensateur ,le courant électrique dans le circuit peux avoir une valeur maximale notée I_m. Trouver l'expression de I_m en fonction de Q_m et T_0, puis en fonction de E, L et C.

7- Donner l'expression littérale de l'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur, Calculer sa valeur à t=0.

8 - Montrer que l' énergie totale E_T se conserve dans le circuit, et que $E_T = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C}$.

9 - De la question 6, retrouver une autre expression de l'énergie totale E_t dans le circuit LC ,en fonction de I_m et L.

Test oscillateur harmonique

Sujet B

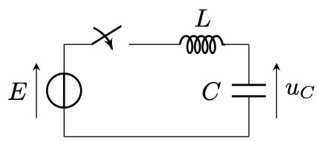
Exercice 1

L'équation horaire du mouvement d'un oscillateur mécanique (ressort) horizontal est donné par la relation suivante : **$x(t) = 3\cos(20t + \pi/4)$** avec **x** en **cm** et **t** en **s.**

1) Donner la période, la fréquence et l'amplitude des oscillations.

2) Donner l'expression de la vitesse et de l'accélération de l'oscillateur en fonction du temps.

Exercice 2



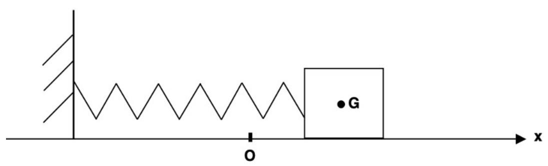
1) Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C après la fermeture de l'interrupteur à t = 0. L'écrire sous forme canonique et identifier la pulsation propre du circuit.

2) On suppose qu'**à l'instant t = 0, le condensateur est déchargé** et **aucun courant ne traverse le circuit.** Déterminer l'expression de la solution de l'équation différentielle.

Exercice 3

Une masse est libre de se déplacer sans frottement sur un rail horizontal. Après avoir écarté la masse de sa position d'équilibre, on la libère sans vitesse initiale.

1) Représenter sur le schéma ci-dessous les forces agissant sur la masse m. Le point O donne l'abscisse du centre de gravité G à la position d'équilibre du système. Dans cette position le ressort n'est ni étiré ni comprimé.



2) Déterminer l'équation différentielle du mouvement relative à l'abscisse x = OG du centre de gravité G du mobile à l'instant t.

3) Déterminer l'expression de x(t) : solution de cette équation différentielle. On suppose qu'à l'instant initial t = 0 s, l'oscillateur possède une amplitude x_0 = 2 cm et une vitesse égale à zéro.

4) Exprimer la période propre To des oscillations de l'oscillateur en fonction de k et m.

On considère un dispositif solide ressort horizontal constitué d'un ressort de constante de raideur k = 50 N.m-1 et d'un solide de masse m = 500 g. On prend la position d'équilibre du solide comme origine d'un axe Ox. Tous les frottements sont négligés. Le solide est lancé à la date t = 0 depuis la position x = 5,0 cm, avec une vitesse initiale de coordonnée $v0$ = - 0,50 m.s-1. L'évolution au cours du temps de la position du solide est donnée par *x*(*t*) *X* cos

a) *L'équation différentielle vérifiée par x(t) est : x m x 0 . k*

1. b) *T0 0,63 s.*
2. c) .
3. d) *Xm=7,1cm.*

position du solide est donnée par $x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0} + \varphi\right)$.

Données : $2\pi \approx 6,3$; $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$.

a) *L'équation différentielle vérifiée par x(t) est :* $\ddot{x} + \frac{m}{k}x = 0$.

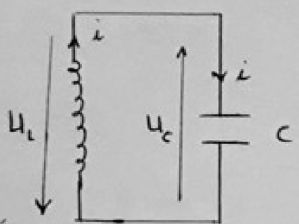
b) $T_0 \approx 0,63$ *s.*

c) $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

d) *Xm = 7,1 cm.*

LC : EX 1

1) Convention : récepteur.



2) La loi d'additivité des tensions : $u_L + u_c = 0$

avec $u_c = \frac{q}{c}$ et $u_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$

donc $\frac{q}{c} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0$

soit alors : $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$

3) il suffit de remplacer la solution dans l'équation différentielle :

on a $\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Q_m \cdot \cos\left(2\pi\frac{t}{T_0} + \varphi\right)\right)$

donc $\frac{d^2q}{dt^2} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 q(t) = 0$

donc $\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

4) graphiquement $T_0 = 1,4\,ms$

et on a : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

d'où $L = \left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 \times \frac{1}{C}$

AN $L = \frac{(1,4.10^{-3})^2}{(2\pi)^2} \times \frac{1}{10.10^{-6}}$

$\underline{L = 5\,mH}$

5) à t = 0, graphiquement $u_c = 4V$

donc $q(t=0) = Q_m \cdot \cos(\varphi)$

et puisque $u_c(0) = u_{cm} \Rightarrow q() = Q_m$

donc $\cos(\varphi) = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

n'est pas nécessaire

$u_{cm} = \frac{Q_m}{C} \Rightarrow Q_m = C\,u_{c.m}$

6) on a $i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Q_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0} + \varphi\right)\right)$

$i(t) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right) \cdot Q_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

on pose $I_m = \frac{2\pi}{T_0} \cdot Q_m$

à t = 0 $Q_m = u_c(0) \cdot C = E \cdot C$

et $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

donc : $I_m = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} \cdot E \cdot C$

$\boxed{I_m = E \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}}$

7) $E_e = \frac{1}{2}C u_c^2(t)$ à t = 0 $u_c(0) = E = 4V$

donc $E_e = \frac{1}{2}C \cdot E^2$

AN $E_e = \frac{1}{2} \cdot 10.10^{-6} \cdot 4^2$

$E_e = 80\,\mu J$

8) $E_T = E_e + E_m$

$= \frac{1}{2}C u_c^2 + \frac{1}{2}L i^2$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2(t)}{C} + \frac{1}{2}L i^2$

donc $E_T = \frac{1}{2C}\left[q^2(t) + LC i^2\right]$

$= \frac{1}{2C}\left[Q_m^2 \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T_0} + \varphi\right) + Q_m^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right]$

$E_T = \frac{1}{2C} Q_m^2$

9) de la Question 6 : $Q_m = \frac{T_0}{2\pi} I_m$

donc $E_T = \frac{1}{2C} \cdot I_m^2 \cdot \left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2$

$E_T = \frac{1}{2C} I_m^2 \cdot \left(\frac{2\pi\sqrt{LC}}{2\pi}\right)^2$

$\boxed{E_T = \frac{1}{2} \cdot L I_m^2}$

1/2