

Chapitre 1 : Rappels et vocabulaire de base : algèbre et géométrie

Plan

1	Les mots	1
2	Rappels de base sur les fonctions binomiales	2
3	Notations	3
4	Géométrie de base dans le plan : formulaire pour les autres matières scientifiques.	5
5	Géométrie de base dans l'espace : formulaire pour les autres matières scientifiques.	6

1 Les mots

Il y a peu de mots vraiment utiles pour faire des mathématiques. Il faut cependant bien les utiliser :

- **et** ;
- **ou** (toujours inclusif : si on a : A **et** B alors on a : A **ou** B) ;
- **donc** ;
- **car** ;
- **or** ;
- **si** (à n'utiliser que lorsque c'est vraiment nécessaire).

Les abréviations et les symboles \implies et \iff donnent lieu à trop d'abus : ils sont **interdits** : remplacer par **donc** ou **si ... alors** et **si et seulement si**, à utiliser quand il

faut et comme il faut...

Par contre les symboles :

- \forall ("pour tout");
- \exists ("il existe").

seront utilisés quotidiennement.

2 Rappels sur les ensembles

Si A et B sont 2 ensembles, on peut définir l'intersection, la réunion, la différence de A et B :

$$A \cap B = \{x/x \in A \text{ et } x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x/x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

$$A - B = \{x/x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

Si A est une partie de E , son **complémentaire** est :

$$\overline{A} = \mathfrak{C}_E^A = E - A$$

$A \times B$ est l'ensemble des **couples** formés avec A et B :

$$A \times B = \{(x, y)/x \in A \text{ et } y \in B\}$$

De même si A_1, \dots, A_n sont n ensembles, on définit leur **produit** :

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n)/a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$$

Ses éléments s'appellent des **n -uplets**.

Si E est un ensemble et $A \subset E$, alors on dit que A est une **partie** de E . On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . et E sont des parties de E .

3 Rappels de base sur les fonctions binomiales

Soit f la fonction réelle définie pour x réel par $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme réel de degré 2 avec $a > 0$, b et c réels.

On a la propriété d'identification :

Si pour tout x réels $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ alors $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$. (Ici a, a', b, b', c, c' sont réels. On a : $\text{Min}_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(-\frac{b}{2a})$.)

Théorème 1 (Équation de degré 2 réelle) Dans les conditions précédentes, on pose :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x réel a 2 solutions et 2 seulement :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Dans ce cas, pour tout x réel :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x réel a 1 solution et 1 seulement :

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

Dans ce cas, pour tout x réel :

$$f(x) = a(x - x_1)^2$$

Remarquons qu'on a, dans le cas $\Delta > 0$: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

4 Notations

On considère n , un entier naturel.

Si on a une famille finie $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ de nombres réels ou complexes, on pose :

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

lire : somme pour k allant de 0 à n des a_k et :

$$\prod_{k=0}^n a_k = a_0 \cdot a_1 \cdot \cdots \cdot a_n$$

lire : produit pour i allant de 0 à n des a_k .

Si I est un ensemble fini d'indices, on pose de même : $\sum_{i \in I} a_i$ et $\prod_{i \in I} a_i$ la somme et le produit pour i dans I des a_i .

Ainsi :

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n = 1 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$$

Avec la convention $0! = 1$, on a si $n \in \mathbb{N}$: $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$.

Quelques formules classiques, à connaître :

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Concernant les familles dites "doubles", on a la propriété de permutation des lignes et des colonnes :

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n a_{ij} = \sum_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m} a_{ij}$$

Par distribution :

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^m b_j \right) = \sum_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m} a_i \cdot b_j$$

L'opération \sum est linéaire, c'est à dire, si $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ sont 2 familles de nombres réels ou complexes et si λ et μ sont 2 réels ou complexes alors :

$$\sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i$$

Ensuite une formule **fondamentale**

Théorème 2 (Somme de la série géométrique) *Si a et b sont des réels (ou des complexes) et n est un entier naturel non nul :*

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

En particulier, si $x \neq 1$ est réel (ou complexe) :

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + \dots + x^{n-1} + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Définition 1 *On pose si $0 \leq p \leq n$ sont des entiers :*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{p!} \in \mathbb{N}$$

$\binom{n}{p}$ se lit "p dans n" et s'appelle **coefficient binomial**.

Si $p > n$ ou si p ou n sont des entiers strictement négatifs, on convient : $\binom{n}{p} = 0$.

Dans les conditions précédentes, on observe :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Le résultat suivant permet de calculer les coefficients binomiaux de proche en proche (bien plus efficace que la formule précédente) à l'aide du **triangle de Pascal**

Théorème 3 (Triangle de Pascal) *Si p et n sont des entiers naturels :*

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Une des sources d'intérêt des coefficients binomiaux est la formule fondamentale suivante :

Théorème 4 *Si a et b sont des nombres réels ou complexes et n est un entier naturel :*

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{1}ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

5 Géométrie de base dans le plan : formulaire pour les autres matières scientifiques.

On muni le plan (qu'on notera souvent \mathbb{R}^2 d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Les coordonnées d'un point M sont souvent notées : (x, y) ou $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, celle d'un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ ce qui correspond à :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad \vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j}$$

Une droite D du plan a une équation de la forme $D : ax + by = c$ (a, b et c sont des réels avec a et b non tous les 2 nuls).

Les droites $D : ax + by = c$ et $D : a'x + b'y = c'$ sont parallèles (ou confondues) si et seulement si $ab' - a'b = 0$ autrement dit les vecteurs (a, b) et (a', b') sont proportionnels.

Si les droites $D : ax + by = c$ et $D : a'x + b'y = c'$ ne sont pas parallèles, leur intersection qui est un point se détermine en résolvant le système linéaire :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

par combinaisons de lignes.

Dans le cas où le repère est orthonormé direct et qu'on considère des vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$, on dispose du produit scalaire, du déterminant et de la norme :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = u_x v_x + u_y v_y \quad \det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x$$

$$\|\vec{u}\| = \left\| \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \quad , \quad \|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

Le produit scalaire et le déterminant mesurent respectivement le parallélisme (ou la proportionnalité) et l'orthogonalité : si $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ sont des vecteurs :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ si et seulement } \vec{u} \perp \vec{v} \quad \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \text{ si et seulement } \vec{u} \parallel \vec{v}$$

Á noter, dans les conditions précédentes :

- $u_x = \vec{u} \cdot \vec{i}$
- $u_y = \vec{u} \cdot \vec{j}$

Si \vec{u} et \vec{v} sont 2 vecteurs du plan, alors :

- $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \sin(\angle(\vec{u}, \vec{v})) \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\angle(\vec{u}, \vec{v})) \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$

6 Géométrie de base dans l'espace : formulaire pour les autres matières scientifiques.

On muni l'espace (qu'on notera souvent \mathbb{R}^3) d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les coordonnées d'un point M sont souvent notées : $M : (x, y, z)$ ou $M : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, celle

d'un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ ce qui correspond à :

$$\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad \vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$$

Un plan P de l'espace a une équation de la forme : $P : ax + by + cz = d$ (a, b, c et d sont des réels avec a, b et c non tous les 3 nuls).

Les plans $P : ax + by + cz = d$ et $P' : a'x + b'y + c'z = d'$ sont parallèles (ou confondus) si et seulement si les vecteurs (a, b, c) et (a', b', c') sont proportionnels. Dans le cas contraire, le système :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

forme un système d'équations de la droite $P \cap P'$.

Dans le cas où le repère est orthonormé et qu'on considère des vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$, on dispose du produit scalaire, du produit vectoriel et de la norme :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \quad , \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{u}\| = \left\| \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \quad , \quad \|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

À noter, dans les conditions précédentes :

- $u_x = \vec{u} \cdot \vec{i}$
- $u_y = \vec{u} \cdot \vec{j}$
- $u_z = \vec{u} \cdot \vec{k}$

Le produit vectoriel et le produit scalaire mesurent respectivement le parallélisme (ou la proportionnalité) et l'orthogonalité : si \vec{u} et \vec{v} sont des vecteurs :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ si et seulement } \vec{u} \perp \vec{v} \quad , \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ si et seulement } \vec{u} \parallel \vec{v}$$

Si \vec{u} et \vec{v} sont 2 vecteurs de l'espace, alors :

- $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \perp \vec{u}$
- $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \perp \vec{v}$
- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = |\sin(\vec{u}, \vec{v})| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$

Savoirs et savoirs faire indispensables

Savoirs

Formules sur l'équation de degré 2. Formule de la série géométrique, de la série arithmétique. Somme des carrés. Formule du binôme.

Savoir-faire

Savoir reconnaître une somme géométrique, arithmétique, binomiale et, dans ce cas, appliquer les formules du cours.