Sup MPSI, Lycée Jean Perrin.

Fiche 5 : Td du 14-09.

Exercice 1

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants : $a = -3 + 3i \quad b = 1 - i\sqrt{3}$
Mettre sous forme algébrique le complexe $a = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

Exercice 2

Déterminer pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{Z}$, le nombre $(1 + \sqrt{3}i)^n$ est un réel positif.

Exercice 3

Déterminer les racines carrées des nombres $3 + 4i$ puis $5 + 12i$ sous forme algébrique.

Exercice 4

On pose $u = e^{2i\pi/5}$

1. Calculer $u^4 + u^3 + u^2 + u + 1$ à l'aide de l'identité géométrique.
2. En déduire une relation simple vérifiée par $\cos(\frac{2\pi}{5})$ puis une expression algébrique de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
3. Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

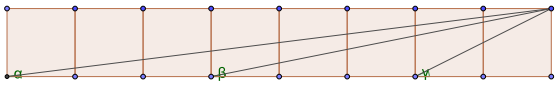
Exercice 5

Pour x réel :

1. À l'aide des formules de Moivre et d'Euler, linéariser $\cos^5(x)$ et $\sin^5(x)$.
2. À l'aide des formules d'Euler puis Moivre, calculer $\sin(3x)$ et $\sin(5x)$ en fonction de $\sin(x)$.

Exercice 6

Soit la figure suivante : on a dessiné 8 carrés et repéré les angles α, β, γ.



Montrer que $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$ (*On pourra écrire des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 dont les arguments sont α, β et γ et calculer $z_1 * z_2 * z_3$*).

Exercice 7

Trouver tous les nombres complexes z tels que les points d'affixes z, z^2 et z^4 soient alignés.