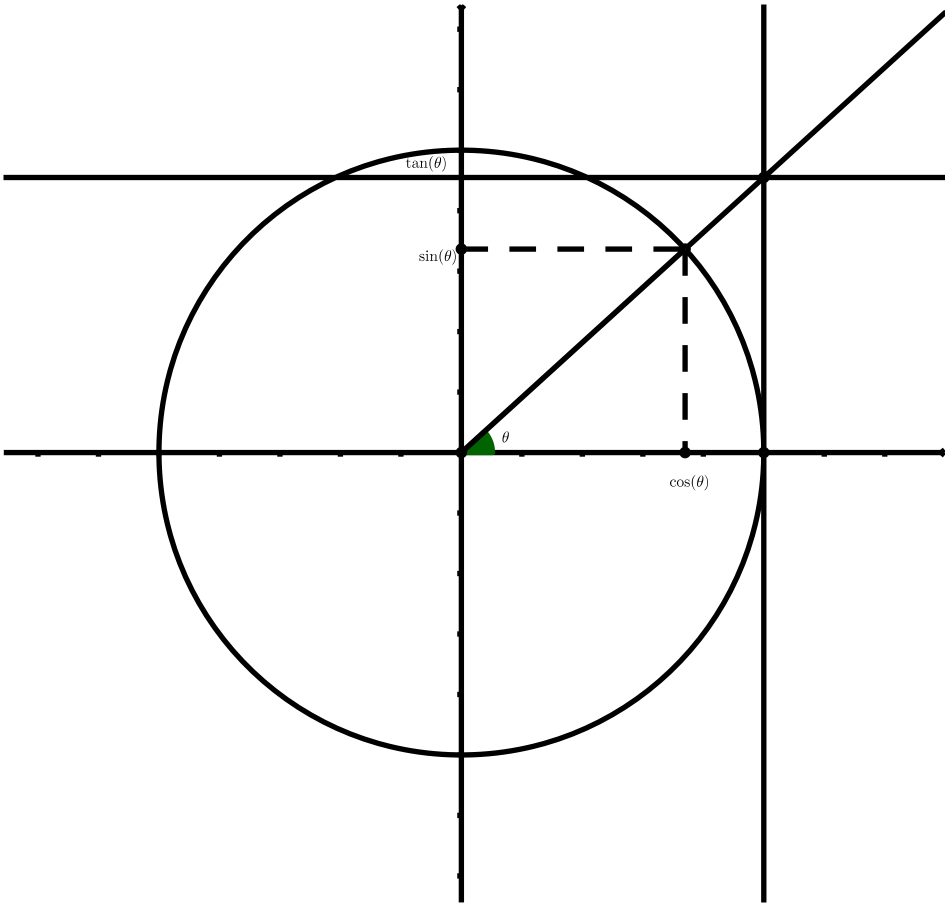
Chapitre 2 : Nombres complexes, trigonométrie

Plan

1 Un peu de trigonométrie



On pose pour a tel que $\cos(a) \neq 0$:

$$\tan(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$$

Á connaître, les valeurs classiques :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	NS

Formules de Pythagore Si θ est un réel :

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Pour θ tel que $\cos(\theta) \neq 0$:

$$\tan^2(\theta) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$$

Formules de translations, symétries Pour tout x réel tel que les termes existent :

$$\begin{array}{ccccc}
\sin(x+2\pi)=\sin(x) & ; & \cos(x+2\pi)=\cos(x) & ; & \tan(x+2\pi)=\tan(x)\\
\sin(x+\pi)=-\sin(x) & ; & \cos(x+\pi)=-\cos(x) & ; & \tan(x+\pi)=\tan(x)\\
\sin(\pi-x)=\sin(x) & ; & \cos(\pi-x)=-\cos(x) & ; & \tan(\pi-x)=-\tan(x)\\
\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos(x) & ; & \cos(x+\frac{\pi}{2})=-\sin(x) & ; & \tan(x+\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{\tan(x)}\\
\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos(x) & ; & \cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(x) & ; & \tan(\frac{\pi}{2}-x)=\frac{1}{\tan(x)}\\
\sin(-x)=-\sin(x) & ; & \cos(-x)=\cos(x) & ; & \tan(-x)=-\tan(x)
\end{array}$$

Formules d'addition Si a et b sont réels.

$$\begin{cases}
\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)\\
\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)\\
\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\\
\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\\
\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)\\
\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)
\end{cases}$$

Quand les termes existent :

$$\begin{cases}
\tan(2a)=\dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}\\
\tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a).\tan(b)}\\
\tan^2(a)+1=\dfrac{1}{\cos^2(a)}
\end{cases}$$

Formules de linéarisation

$$\begin{cases}
\sin(a)\sin(b)=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)\\
\cos(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)\\
\sin(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\cos^2(a)=\dfrac{1+\cos(2a)}{2}\\
\sin^2(a)=\dfrac{1-\cos(2a)}{2}\\
\sin(a)\cos(a)=\dfrac{\sin(2a)}{2}
\end{cases}$$

Formules de factorisation

$$\begin{cases} \sin(a)+\sin(b) = 2\sin(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2}) \\ \cos(a)+\cos(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2}) \\ \sin(a)-\sin(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2}) \\ \cos(a)-\cos(b) = -2\sin(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2}) \end{cases}$$

Formules concernant $\tan$ (Peuvent être utiles un jour ou l'autre, pas à connaître par cœur à priori).

Quand les termes sont définis :

$$\begin{cases} \tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)} \\ \sin(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1+\tan^2(a)} \\ \cos(2a) = \dfrac{1-\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)} \end{cases}$$

2 Ensemble des nombres complexes

Rappelons qu'on note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels (ou nombres).

2.1 Notion de nombre complexe

Définition 1 *Un* ***nombre complexe*** *est un nombre de la forme :*

$$z = a + ib$$

où a et b sont réels et $i^2 = -1$.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes :

$$\mathbb{C} = \{z = a+ib \ \ / \ \ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

Souvent, i est noté j en physique, pour ne pas confondre avec l'intensité. Cette notation est réservée en mathématiques au nombre $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Si $z = a + ib$ avec a et b réels alors :

a est la **partie réelle** de z : $a = \mathrm{Re}(z)$ et
b est la **partie imaginaire** de z : $b = \mathrm{Im}(z)$.

Attention, la partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre RÉEL !

Propriété 1 (Identification des parties réelles et imaginaires) *Si z est un complexe :*

$$z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$$

*Si $z = a + ib = c + id$ avec a, b, c, d **réels** alors $a = c = \mathrm{Re}(z)$ et $b = d = \mathrm{Im}(z)$.*

Un complexe donné sous la forme précédente est dit écrit sous **forme algébrique**.

Un complexe tel que $z = \mathrm{Re}\, z$, c'est à dire $\mathrm{Im}\, z = 0$ est en fait un réel. Un complexe tel que $z = i\,\mathrm{Im}\, z$, c'est à dire $\mathrm{Re}\, z = 0$ est en fait un **imaginaire pur**. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

2.2 Représentation géométrique

On muni le plan d'un repère orthonormé direct $R = (O, \vec{I}, \vec{J})$.

Définition 2 *Tout complexe $z = a + ib$ avec a et b réels, est identifié avec le point $M(z)$ de coordonnées (a, b) dans R et le vecteur $\vec{v}(z)$ de coordonnées (a, b) dans R.*

*On dit que $M(z)$ et $\vec{v}(z)$ ont pour **affixe** z.*

L'affixe d'un point A du plan est souvent notée z_A.

Souvent, on confond en pratique z, $M(z)$ et $\vec{v}(z)$ et on identifie du coup $\mathbb{C}$ et le plan $\mathbb{R}^2$

2.3 Opérations algébriques

Si $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$, avec a, a', b, b' réels alors :

- $z + z' = (a + a') + i(b + b') \in \mathbb{C}$
- $z.z' = (a + ib)(a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b) \in \mathbb{C}$.

Si de plus $z' \neq 0$, (technique dite de la quantité **conjugée**) :

- $\dfrac{1}{z'} = \dfrac{1}{a' + ib'} = \dfrac{a' - ib'}{a'^2 + b'^2} = \dfrac{a'}{a'^2 + b'^2} + i\dfrac{-b'}{a'^2 + b'^2} \in \mathbb{C}$.
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{a + ib}{a' + ib'} = \dfrac{(a + ib)(a' - ib')}{a'^2 + b'^2} = \dfrac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + i\dfrac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2} \in \mathbb{C}$.

Notons que tout complexe non nul a un inverse.

On dira que $\mathbb{C}$ (muni des opérations $+$ et $*$) est un **corps**.

On rappelle dans ce cadre 2 formules fondamentales : la formule du binôme et la formule de la série géométrique :

Théorème 1 *Si a et b sont des complexes et n est un entier naturel non nul :*

$$\begin{array}{rcl} (a+b)^n & = & a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{1}ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\ a^n - b^n & = & (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ a^n - 1 & = & (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1) \end{array}$$

En particulier, si $x \neq 1$ est ou complexe :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \cdots + x^{n-1} + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

2.4 Quantité conjuguée, module

Définition 3 *Si $z = a + ib$ avec a et b réels est un complexe, on pose $\overline{z} = a - ib \in \mathbb{C}$. $\overline{z}$ est le* ***conjugué*** *de z.*

On a $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$. De plus, $\overline{(\overline{z})} = z$.

Soit z un complexe.
z est réel si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0$ ou $\overline{z} = z$ ou $z = \mathrm{Re}(z)$.
z est imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$ ou $\overline{z} = -z$ ou $z = i\,\mathrm{Im}(z)$.

On a les formules dites d'Euler :

Propriété 2

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

Si z et z' sont complexes alors :

$$\begin{array}{rcll} \overline{z+z'} & = & \overline{z} + \overline{z'} & \\ \overline{z.z'} & = & \overline{z}.\overline{z'} & \\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} & = & \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} & \quad \text{Si } z' \neq 0 \end{array}$$

Définition 4 *Si $z = a + ib$ avec a et b réels alors on pose :*

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\overline{z}} \qquad |z|^2 = z\overline{z}$$

$|z|$ est le ***module*** *de z. C'est un réel positif.*

Si z et z' sont complexes alors :

$$\begin{array}{rcl} |z.z'| & = & |z|\,.\,|z'| \\ \left|\frac{z}{z'}\right| & = & \frac{|z|}{|z'|} \\ |\overline{z}| & = & |z| \end{array}$$

2.5 Cercle trigonométrique

Définition 5 *Si $\theta \in \mathbb{R}$, on pose :*

$$e^{i\theta} = \exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

$e^{i\theta}$ est l' ***exponentielle complexe*** *de $i\theta$*

En particulier : $e^0 = e^{2i\pi} = 1$, plus généralement, l'application $\theta \to e^{i\theta}$ est 2π-périodique.

Si θ est un réel alors (d'après le théorème de Pythagore) $|e^{i\theta}| = 1$. Réciproquement, si z est un complexe avec $|z| = 1$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \exp(i\theta)$. On a donc :

Propriété 3 *On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.*

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta}/\theta \in \mathbb{R}\} = \{z = a + ib/a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1\}$$

On aura tendance a appeler $\mathbb{U}$ cercle trigonométrique...

On a les formules dites d'Euler, de Moivre.

Propriété 4 *Si θ, θ' sont des réels et n est un entier :*

$$\exp\left(i(\theta + \theta')\right) = \exp\left(i\theta\right) . \exp\left(i\theta'\right), \quad \exp\left(in\theta\right) = \left(\exp\left(i\theta\right)\right)^n$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}, \quad \left|e^{i\theta}\right| = 1$$

Si $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

On en déduit que si $z \in \mathbb{U}$, $z' \in \mathbb{U}$ alors $z.z' \in \mathbb{U}$ et $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$. On dira que $\mathbb{U}$ est un **groupe multiplicatif**.

On a aussi, si θ, p , q sont réels.

$$1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$e^{ip} + e^{iq} = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}$$

$$e^{ip} - e^{iq} = 2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}$$

Notons que si $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ sont fixés :

- $\{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| = r\}$ définit le **cercle** de centre z_0 et de rayon r.
- $\{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| \leq r\}$ définit le **disque** de centre z_0 et de rayon r.

Propriété 5 *Si $z \in \mathbb{C}$ a pour image $M(z)$ et $\vec{v}(z)$ alors*

$$|z| = \underbrace{d(O, M(z))}_{\text{distance entre } O \text{ et } M(z)} = \|\vec{v}(z)\|$$

Si A et B sont des points du plan alors : $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ et :

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$$

Le milieu I du segment $[A, B]$ a pour affixe :

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Dit autrement, z_I est la moyenne de z_A et z_B et si z et a sont 2 complexes, $|z - a|$ est la distance vue sur le plan entre z et a.

Propriété 6 (Inégalité triangulaire) *Si z et z' sont 2 complexes alors :*

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

2.6 Arguments d'un complexe

On dit que a et b sont **congrus modulo** 2π ou **égaux modulo** 2π quand il existe k entier relatif tel que : $a = b + k.2\pi$ et on note alors :

$$a \equiv b \ [2\pi]$$

On a les règles de calcul suivantes.

Si a, b, c, d sont des réels et k un entier relatif :

- Si $\begin{cases} a \equiv b \ \ [2\pi] \text{ et} \\ c \equiv d \ \ [2\pi] \end{cases}$ alors : $a + c \equiv b + d \ \ [2\pi]$
- Si $a \equiv b \ \ [2\pi]$ alors : $-a \equiv -b \ \ [2\pi]$
- Si $a \equiv b \ \ [2\pi]$ alors : $k.a \equiv k.b \ \ [2\pi]$

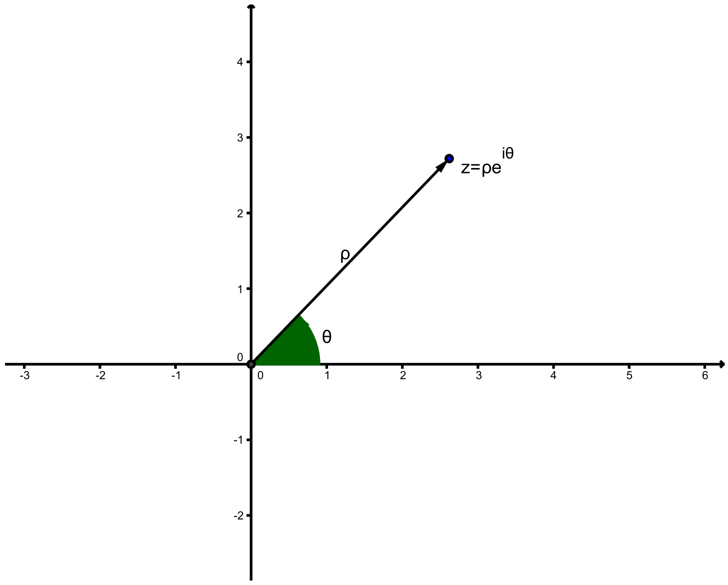
Dit autrement, les égalités modulo s'additionnent et se multiplient par des entiers relatifs. Attention, elles se divisent très mal.

Soit z un complexe non nul, on peut écrire : $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Définition 6 *Si on écrit :*

$$z = \rho e^{i\theta}$$

avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ alors on dit qu'on a écrit $z \in \mathbb{C}^*$ sous forme ***trigonométrique*** *ou* ***exponentielle****. On a $\rho = |z|$: ρ est le module de z et on dit que θ est* ***un argument*** *de z.*



En particulier, $e^{i\theta}$ a pour argument θ et pour module 1.

Propriété 7 *Si $z = \rho e^{i\theta} = \rho' e^{\theta'}$ avec ρ et ρ' dans $\mathbb{R}_+^*$ et θ, θ' dans $\mathbb{R}$ alors :*
$\rho = \rho'$ et $\theta = \theta'$ à 2π près. On note :

$$\theta \equiv \theta' \quad [2\pi]$$

En combinant les formules précédentes, on obtient, si z et z' sont 2 complexes non nuls :

- Si z a pour argument θ, z' a pour argument θ' alors $z * z'$ a pour argument $\theta + \theta'$.
- Si z a pour argument θ, z' a pour argument θ' alors $\frac{z}{z'}$ a pour argument $\theta - \theta'$.

Dans toutes ces relations k est un entier relatif.

Pour finir sur l'argument :
Si a, b, c sont des complexes distincts d'images respectives A, B, C dans le plan : l'angle $\widehat{ACB}$ est un argument du complexe : $\frac{b-c}{a-c}$.

Propriété 8 *Si z et z' sont non nuls et si $|z + z'| = |z| + |z'|$ alors z et z' ont un même argument.*

2.7 Quelques transformations du plan

Soit b un complexe fixé et a un complexe non nul fixé qu'on représente sous forme trigonométrique $a = \rho e^{i\theta}$ $(\rho \in \mathbb{R}_+^*, \theta \in \mathbb{R})$.

- La transformation $z \to \overline{z}$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe réel
- La transformation du plan complexe $z \to z + b$ est la translation du vecteur d'affixe b.
- Dans le cas où $\rho = 1$, la transformation $z \to a.z = e^{i\theta}.z$ est la rotation d'angle θ de centre O.
- Dans le cas où $\theta = 0$, la transformation $z \to a.z = \rho.z$ est l'homothétie de rapport ρ de centre O.
- La transformation du plan complexe $z \to a.z + b$ est une similitude directe de rapport ρ c'est à dire la composée d'une rotation, d'une homothétie de rapport ρ et d'une translation. C'est en particulier une transformation qui préserve les angles orientés et qui multiplie les longueurs par ρ.

2.8 Une factorisation utile

On considère $a > 0$ (le calcul est à adapter sinon) et b un réel et le "signal" $a\cos(t) + b\sin(t)$ $(t \in \mathbb{R})$. On fait le calcul :

$$\begin{aligned} a\cos(t) + b\sin(t) &= \mathrm{Re}(ae^{it} - ibe^{it}) \\ &= \mathrm{Re}(e^{it}(a - bi)) \end{aligned}$$

On écrit $a - ib$ sous forme trigonométrique : $a - ib = Ae^{-i\phi}$ où $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ pour conclure :

$$\begin{aligned} a\cos(t) + b\sin(t) &= \mathrm{Re}(e^{it}Ae^{-i\phi}) \\ &= \mathrm{Re}(Ae^{i(t-\phi)}) \\ a\cos(t) + b\sin(t) &= A\cos(t - \phi) \end{aligned}$$

Autrement dit la somme des 2 signaux $a\cos(t)$ et $b\sin(t)$ est un signal sinusoïdal d'amplitude A.

3 Exponentielle complexe

Définition 7 *Si $z = x + iy$ avec x et y réel, alors, on pose :*

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

Autrement dit :

$$\exp(z) = e^z = e^{\mathrm{Re}(z)+i\,\mathrm{Im}(z)} = e^{\mathrm{Re}(z)}e^{i\,\mathrm{Im}(z)} = e^{\mathrm{Re}(z)}\left(\cos(\mathrm{Re}(z)) + i\sin(\mathrm{Im}(z))\right)$$

*Le nombre $\exp(z) = e^z$ est l'**exponentielle** (complexe) du nombre z.*

Propriété 9 *Si z et $z'z$ sont des complexes alors :*

$$\exp(z+z') = e^{z+z'} = e^z e^{z'} = \exp(z).\exp(z') \quad (\exp(z))^{-1} = \frac{1}{e^z} = \exp(-z)$$

$$|\exp(z)| = e^{\mathrm{Re}(z)}.$$

$\mathrm{Im}(z)$ *est un argument de e^z.*
Si n est un entier : $\exp(nz) = \exp(z)^n$.

Si z et z' sont complexes alors $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z' = z + 2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Si $a = \rho e^{i\theta}$ est un complexe non nul écrit sous forme trigonométrique alors :

$$\exp(z) = a = \rho e^{i\theta} \text{ si et seulement si } z = \ln(\rho) + i(\theta + 2k\pi) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

4 Équation du second degré

4.1 Racines complexes d'un réel.

Rappelons que si $a > 0$:

a a 2 racines réelles et complexes, les nombres $\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$:

$$(\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a$$

$-a$ n'a pas de racines réelle. Il a 2 racines carrées complexes, les nombres $i\sqrt{a}$, $-i\sqrt{a}$:

$$(i\sqrt{a})^2 = (-i\sqrt{a})^2 = -a$$

4.2 Racines d'un complexe

On considère $\lambda = \rho e^{i\theta}$ un complexe non nul écrit sous forme trigonométrique ($\rho \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$) et l'équation d'inconnue z complexe :

$$z^2 = \lambda = \rho e^{i\theta}$$

Propriété 10 *L'équation précédente a 2 solutions complexes qui sont les nombres :*

$$\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}} \quad ; \quad -\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

c'est à dire les nombres :

$$\sqrt{\rho}\exp\left(i\frac{\theta}{2}\right) \quad et \quad -\sqrt{\rho}\exp\left(i\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

*Ces nombres s'appellent les **racines carrées complexes** de λ.*

On peut aussi chercher ces racines sous forme algébrique en posant $z = a + ib$ a et b réels et en écrivant les relations :

$$\begin{cases} z^2 = (a^2 - b^2) - 2iab = \lambda \\ |z|^2 = a^2 + b^2 = |\lambda| \end{cases}$$

Attention, la notation $\sqrt{x}$ est exclusivement réservée au cas où x est un **réel positif**.

4.3 Rappel sur l'équation réelle

On considère maintenant a, b, c des réels avec $a \neq 0$ et l'équation d'inconnue z éventuellement complexe :

$$az^2 + bz + c = 0$$

Son **discriminant** est $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$.

Théorème 2
- *Si $\Delta > 0$, l'équation précédente a 2 solutions réelles et 2 seulement (pas d'autre solution éventuellement complexe) qui sont les nombres :*

$$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- *Si $\Delta = 0$, l'équation précédente a 1 solution réelle et une seule (dite **solution double**) (pas d'autre solution éventuellement complexe) qui est le nombre :*

$$\frac{-b}{2a}$$

- *Si $\Delta < 0$, l'équation précédente a 2 solutions complexes et 2 seulement (pas de solution réelle), qui sont conjuguées et qui sont les nombres :*

$$\frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad ; \quad \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

4.4 Équation complexe

On considère maintenant a, b, c des complexes avec $a \neq 0$ et l'équation d'inconnue z complexe :

$$az^2 + bz + c = 0$$

Son **discriminant** est $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$.

Théorème 3
- *Si $\Delta \neq 0$, l'équation précédente a 2 solutions complexes qui sont les nombres :*

$$\frac{-b - \delta}{2a} \quad ; \quad \frac{-b + \delta}{2a}$$

où δ est une des racines carrées complexes de Δ, c'est à dire : $\delta^2 = \Delta$.

- *Si $\Delta = 0$, l'équation précédente a 1 solution complexe (dite **solution double**) qui est le nombre :*
$$\frac{-b}{2a}$$

Si on note α et β les racines ($\alpha = \beta$ dans le cas de la racine dite double) de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, on a :

- $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$
- $\alpha.\beta = \frac{c}{a}$
- pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$$az^2 + bz + c = a(z - \alpha)(z - \beta)$$

Dans le dernier cas, on dit qu'on a factorisé l'expression (ou le **polynôme**) $az^2 + bz + c$ par $(z - \alpha)$ et $(z - \beta)$.

Une application classique :

Théorème 4 *Soit s et p 2 complexes fixés.*

*Les complexes α et β sont solutions du problème, dit **problème à la somme et au produit** :*
$$\begin{cases} \alpha + \beta = s \\ \alpha.\beta = p \end{cases}$$
si et seulement on a
$$\{\alpha, \beta\} = \{\textit{Racines complexes du trinôme } z^2 - sz + p\}$$

Rappelons que, dans ce cas, pour tout $z^i n^C$: $(z - \alpha).(z - \beta) = z^2 - sz + p$.

Le problème à la somme et au produit a donc 2 couples solutions quand $s^4 \neq 4p$, un seul quand $s^2 = 4p$.

5 Équations polynomiales

On considère maintenant a, b, c, d des complexes avec $a \neq 0$ et l'équation d'inconnue z éventuellement complexe :
$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

Théorème 5 *Si α complexe est une racine de l'équation alors on peut factoriser l'expression (ou polynôme) $az^3 + bz^2 + cz + d$ par $(z - \alpha)$.*

Autrement il existe A,B, C complexes tel que, pour tout z complexe :
$$az^3 + bz^2 + cz + c = a(z - \alpha)(z^2 + Bz + C)$$

Ainsi les racines de l'équation $az^3+bz^2+cz+d=0$ sont les racines de $z^2+Bz+C=0$ complétées par α.

En degré n : si z, a sont complexes, n un entier :

$$z^n-a^n=(z-a)(z^{n-1}+az^{n-2}+a^2z^{n-3}+\dots a^{n-2}z+a^{n-1})$$

Ici a est racine du polynôme : z^n-a^n.

Plus généralement, si P est un polynôme de degré n et α est une racine de P : $P(\alpha)=0$ alors P est factorisable par $(z-\alpha)$: $P(z)=(z-\alpha)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré $n-1$.

Ainsi on montre que le nombre de solution d'une équation polynomiale est majoré par le degré de l'équation.

6 Racines n-ièmes

n est un entier non nul fixé.

On considère l'équation d'inconnue z complexe suivante : $z^n=1$.

Théorème 6 *L'équation $z^n=1$ a n solutions distinctes, les n nombres complexes suivants :*

$$Z_0=1, Z_1=\exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right), Z_2=\exp\left(\frac{4i\pi}{n}\right)\dots, Z_k=\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right), \dots, Z_{n-1}=\exp\left(\frac{2i(n-1)\pi}{n}\right)$$

Autrement dit les nombres n nombres complexes de module 1 et d'arguments respectifs :

$$0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{2k\pi}{n}, \dots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

*Ces nombres s'appellent les **racines** n-iémes de l'unité.*

On note $\mathbb{U}_n$ les n racines n-ièmes de l'unité :

$$\mathbb{U}_n=\left\{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \quad / \quad k=0\ ...\ n-1\right\}$$

Á noter que le produit de 2 racines n-ièmes de l'unité est une racine n-ième de l'unité et l'inverse d'une racine n-ième de l'unité en est encore une. On dira que $\mathbb{U}_n$ est un **groupe multiplicatif**.

Attention, les notations $\sqrt{x}$ et $\sqrt[n]{x}$ sont exclusivement réservées au cas où x est un **réel positif**. Pour rappel, dans ce cas, $\sqrt[n]{x}$ est l'unique réel positif tel que $(\sqrt[n]{x})^n=x$.

On considère maintenant l'équation (E_a) d'inconnue z complexe suivante :

$$z^n = a$$

où a est un nombre complexe non nul fixé.

On écrit a sous forme trigonométrique : $a = \rho \exp(i\alpha)$ où $\rho \in \mathbb{R}_+^*$.

On constate alors que l'équation (E_a) a une racine "évidente" $z_0 = \sqrt[n]{\rho} \exp\left(i\frac{\alpha}{n}\right)$.

On peut alors se ramener à l'équation $\left(\dfrac{z}{z_0}\right)^n = 1$ et obtenir :

Propriété 11 *Les racines de l'équation* (E_a) *sont obtenues en multipliant la racine "évidente"* $z_0 = \sqrt[n]{\rho} \exp\left(i\frac{\alpha}{n}\right)$ *par les* n *racines* n*-ièmes de l'unité. L'équation* (E_a) *a donc* n *racines.*
Dit autrement :

$$z^n = a \textit{ si et seulement si } z \in \{z_0.u_k / u_k \in \mathbb{U}_n\}$$

Savoirs et savoirs faire indispensables

Savoirs

Formules de trigonométrie diverses. Formules sur les nombres complexes : Moivre, Euler, Formule du binôme...
Exponentielle complexes et formules associées.
Racines n-ièmes de l'unité.

Savoir-faire

Application des nombres complexes : linéarisation, factorisation d'expression trigonométriques (entre autres ...).
Savoir résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$; une équation $z^n = a$.
Factorisation d'une expression de degré 3 dans $\mathbb{C}$ avec une racine connue.