Fiche 7 : TD du 21-09.

Exercice 1

1. Déterminer les solutions de l'équation d'inconnue réelle x : $5x - 20x^3 + 16x^5 = 0$.
2. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, donner une expression de $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ (on pourra développer $e^{i5\theta}$).
3. Montrer alors que : $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.
4. En déduire que :
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Exercice 2

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que si p et n sont des entiers :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Exercice 3

On cherche à résoudre l'équation (e) :

$$P(x) = x^3 - x = \frac{1}{3}$$

d'inconnue x réelle.

1. Montrer par une étude de fonction que (e) a 3 solutions réelles et 3 seulement $x_1 < x_2 < x_3$ qui sont toutes dans l'intervalle $[-2, 2]$
2. Calculer, si $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
3. Simplifier, si $\theta \in \mathbb{R}$: $P\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\theta)\right)$
4. En déduire des expression trigonométriques de x_1, x_2 et x_3.

Exercice 4

On pose si $n \in \mathbb{N}$:

$$A = \sum_{k=0}^{n} 2^{2k} \binom{n}{2k} \quad ; \quad B = \sum_{k=0}^{n} 2^{2k} \binom{n}{2k+1}$$

Déterminer $A + 2B$ et $A - 2B$ et en déduire les valeurs de A et B.
On rappelle que si $p > n$ sont des entiers naturels $\binom{n}{p} = 0$.

Exercice 5

On pose si $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k 2^k$$

1. Simplifier l'expression $2S_n - S_n$ et en déduire la valeur de S_n.