Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 25 Septembre 2020.

DS 1, Durée 2 h, Calculatrices interdites.

Exercice 1

On pose $u = \exp\left(\frac{2i\pi}{7}\right)$ et $S = u + u^2 + u^4$.

1. Combien vaut u^7 ?
2. Représenter sur le cercle trigonométrique : u, u^2,...,u^6.
3. Montrer que $S + \bar{S} = -1$.
4. Calculer $S\bar{S}$ (*le résultat est un entier*).
5. En déduire les valeurs de S et $\bar{S}$ (on justifiera proprement).

Exercice 2

On considère la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ainsi que la suite u_n définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence : pour $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}$$

On admettra que de telles suites existent et sont définies pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$$
2. On pose $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Vérifier que $\alpha^2 = \alpha + 1$ et $\beta^2 = \beta + 1$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right)$$
4. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de α, β et n.
5. Rappeler la formule dite du triangle de Pascal.
6. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$:
$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$$
On rappelle que pour $k > n$ entiers, on considère : $\binom{n}{k} = 0$

Exercice 3

1. Montrer que si n est un entier naturel alors :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

2. Réciproquement, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels tous strictement positifs tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$$

   Que pouvez vous dire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Exercice 4

Le but de l'exercice est de démontrer que l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ avec x, y des entiers naturels admet une infinité de solutions

1. Soit n entier naturel. Démontrer qu'il existe deux entiers naturels x_n et y_n tels que

$$\begin{cases} (3+2\sqrt{2})^n = x_n + \sqrt{2}y_n \\ (3-2\sqrt{2})^n = x_n - \sqrt{2}y_n \end{cases}$$

2. Démontrer le résultat annoncé.
   Si besoin, on peut admettre que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.