Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 25 Septembre 2020.

DS 1, Correction rapide.

Exercice 1

On pose $u = \exp\left(\frac{2i\pi}{7}\right)$ et $S = u + u^2 + u^4$.

1. $u^7 = 1$
2.
3. Par identité géométrique $S + \bar{S} = -1$.
4. $S\bar{S} = 2$.
5. S et $\bar{S}$ sont racines de l'équation $z^2 + z + 2 = 0$ et $\mathrm{Im}(S) > 0$ donc :

$$S = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$$

Exercice 2

On considère la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ainsi que la suite u_n définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence : pour $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}$$

1. Par récurrence simple, si $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$$
2. On pose $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. On a $\alpha^2 = \alpha + 1$ et $\beta^2 = \beta + 1$.
3. Par récurrence avec prédécesseur faite en classe, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right)$$
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}$.
5. Cf cours.
6. Par récurrence avec prédécesseur : si $n \in \mathbb{N}$:
$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$$

En effet :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}+\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1-k}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1-k}{k}+1 && (1)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k+1}+1 && (2)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n-k}{k}+\binom{n-k}{k+1}\right)+1 && (3)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1-k}{k+1}+1 && (4)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+2-(k+1)}{k+1}+1 && (5)\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+2-k}{k}+1 && (6)\\
\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}+\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1-k}{k} &= \sum_{k=1}^{n+2}\binom{n+2-k}{k} && (7)\\
& && (8)
\end{aligned}
$$

Ce qui permet de faire "tourner" la récurrence.

Exercice 3

1. Vu en classe : si n est un entier naturel alors :

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2$$

2. Réciproquement, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels strictement positifs pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n}x_k^3=\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2$$

Que pouvez vous dire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
On montre par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $x_k=k$.

Exercice 4

Le but de l'exercice est de démontrer que l'équation $x^2-2y^2=1$ avec x,y des entiers naturels admet une infinité de solutions

1. Soit n entier naturel. Par l'identité du binôme ou par récurrence, il existe deux entiers naturels x_n et y_n tels que

$$\begin{cases}(3+2\sqrt{2})^n=x_n+\sqrt{2}y_n\\(3-2\sqrt{2})^n=x_n-\sqrt{2}y_n\end{cases}$$

On observe que de plus, si $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{cases}x_{n+1}=3x_n+4y_n\\y_{n+1}=2x_n+3y_n\end{cases}$$

2. Étant donné que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n^2 - 2y_n^2 = (3 + 2\sqrt{2})^n (3 - 2\sqrt{2})^n = 1$$

et que les suites (x_n) et (y_n) sont strictement croissantes, on a construit une infinité de solutions au problème proposé.