

## Fiche 10 : TD du 27-09.

On rappelle que pour  $a > 0$  et  $b$  réel :

$$a^b = \exp(b \ln(a))$$

### Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants d'inconnue  $x$  et  $y$  réels :

$$\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases} ; \quad \begin{cases} x + y = 7 \\ \ln(x) + \ln(y) = \ln(10) \end{cases}$$

### Exercice 2

Pour  $x > 0$ , on pose  $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$

1. Étudier la fonction  $f$ .
2. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  sur un intervalle qu'on précisera.
3. Expliciter la réciproque  $g$  de  $f$ .

### Exercice 3

Déterminer la dérivée et faire une étude de la fonction définie sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  par  $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$ .

### Exercice 4

Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$  :

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$$

### Exercice 5

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

1. Déterminer son domaine de définition  $D_f$ .
2. Étudier sa parité.
3. Déterminer  $f'$  et étudier la fonction  $f$ .
4. Montrer que pour tout  $x$  réel :  $\sinh(f(x)) = x$  et  $f(\sinh(x)) = x$ .

### Exercice 6

Soit  $g$  la fonction définie pour  $x \geq 1$  par :

$$g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

1. Déterminer  $g'$  (là où  $f$  est dérivable!) et étudier la fonction  $g$ .
2. Montrer que pour tout  $x > 1$  :  $\cosh(g(x)) = x$  et .
3. Que pensez de la formule : pour tout  $x$  réel :  $g(\cosh(x)) = x$  ?