Fiche 15 : TD du 12-10.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ par :

$$f(x) = 2\sin(x) + \tan(x) - 3x$$

1. Montrer que pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}[$:
$$f'(x) = \frac{2\cos^3(x) - 3\cos^2 + 1}{\cos^2(x)}$$
2. Factoriser l'expression $2X^3 - 3X^2 + 1$ (on pourra remarquer que 1 est une racine ...).
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; \dfrac{\pi}{2}[$.
4. Déduire de ce qui précède le sens de variation de f.
5. Montrer que, pour tout $x \in [0; \dfrac{\pi}{2}[$:
$$2\sin(x) + \tan(x) \geq 3x$$

Exercice 1

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

1. Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de l'expression $\frac{1+x}{1-x}$
2. En déduire le domaine de définition D_f de f.
3. Étudier la parité de f sur D_f.
4. Déterminer $f'(x)$ pour $x \in D_f$.
5. Justifier que f est une bijection entre des ensembles à préciser (*On formulera la réponse à cette question sous la forme : la fonction f est une bijection de l'ensemble ... sur l'ensemble ...*)
6. Montrer que pour tout x de D_f : $\tanh(f(x)) = x$
7. Montrer que pour x dans un ensemble qu'on déterminera : $f(\tanh(x)) = x$.

Exercice 2

1. Montrer que si $x \in \mathbb{R}$ alors
$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$$
2. Rappeler les domaines de définition des fonctions arcsin et arctan.

On pose pour la suite de l'exercice et pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \quad ; \quad g(x) = 2\arctan(x)$$

3. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$: $\sin(g(x)) = \sin(f(x))$.
5. En déduire que pour $-1 \leq x \leq 1$,
$$f(x) = g(x)$$
6. Montrer que si $x > 1$, $g(x) \in]\pi/2, \pi[$, et montrer que dans ce cas : $g(x) = \lambda - f(x)$ où λ est une constante qu'on précisera.
7. Proposer et justifier une formule analogue à celle de la question précédente pour $x < -1$.