Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 13 Octobre 2023.

DS 2, Durée 2 h, Calculatrices interdites.

Exercice 1

On pose $\theta_0 = \arccos\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$.

1. Montrer que $\theta_0 \in]0, \frac{\pi}{3}[$.
2. Calculer $\cos(2\theta_0)$ puis démontrer que $\cos(4\theta_0) = -\cos(\theta_0)$.
3. En déduire une expression algébrique de θ_0
4. Résoudre l'équation d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$: $\cos(\theta) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 2

On souhaite étudier la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

1. Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, et est une fonction paire.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$.
3. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.
4. Montrer que si $x \geq 0$ alors $f(x) = 2\arctan(x)$ (*on pourra calculer* $f(1)$).
5. Donner une formule analogue pour $x < 0$.

Exercice 3

On rappelle que, pour x réel, $\tanh(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

1. Rappeler le tableau de variations de la fonction tanh (avec ses limites en $+\infty$ et $-\infty$).
2. Montrer que pour tout réel x non nul, on a :

$$\tanh(x) = \frac{2}{\tanh(2x)} - \frac{1}{\tanh(x)}$$

3. En déduire pour n entier naturel non nul et x réel non nul, la valeur de

$$u_n(x) = 2^0\tanh(2^0x) + 2^1\tanh(2^1x) + \cdots + 2^n\tanh(2^nx)$$

4. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, la limite de $\frac{u_n(x)}{2^n}$ pour $x \to +\infty$.
5. Calculer pour $x \in \mathbb{R}^*$ fixé, la limite de la suite $\frac{u_n(x)}{2^n}$ pour $n \to \infty$.

Exercice 4

On fixe $a > 0$ et on considère la fonction définie par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)$$

1. Donner le domaine de définition de la fonction f et calculer la dérivée de f sur les intervalles $]-\infty, 1/a[$ et $]1/a, +\infty[$.
2. En déduire que si $x < 1/a$ alors

$$f(x) = \arctan(a) + \arctan(x)$$

et si $x > 1/a$ alors

$$f(x) = \arctan(a) + \arctan(x) - \pi$$