Fiche 19 : Arithmétique.

Exercice 1

Sachant que l'on a $96842 = 256 \times 375 + 842$, déterminer, sans faire la division, le reste de la division du nombre 96842 par chacun des nombres 256 et 375.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation d'inconnues x et y suivante :

$$13x - 31y = 1$$

Exercice 3

Combien 15! admet-il de diviseurs ?

Exercice 4

Trouver 1000 entiers consécutifs non premiers.

Exercice 5

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que :

1. $n \mid n + 8$.
2. $n - 1 \mid n + 11$.
3. $n - 3 \mid n^3 - 3$.

Exercice 6

Trouver tous les entiers relatifs n tels que $n^2 + n + 7$ soit divisible par 13.

Exercice 7

Soit $a \geq 2$ un entier et $r \geq 2$ un entier.
On suppose que $a^r - 1$ est un nombre premier.

1. Montrez que r est premier, puis que a vaut 2.
2. Réciproque ?

Exercice 8

Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 9

Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Exercice 10

1. Soit a et n des entiers avec $a \geq 2$ et $n \geq 2$ tel que $a^n + 1$ soit premier, montrer que : $(\exists k \in \mathbb{N})\ n = 2^k$.

   On pose le n ième nombre de Fermat comme étant :

   $$F_n = 2^{2^n} + 1$$

   On peut vérifier à la main que $F_0 = 2 + 1 = 3$, $F_1 = 2^2 + 1 = 5$, $F_2 = 2^4 + 1 = 17$, $F_3 = 2^8 + 1 = 257$ et $F_4 = 2^{16} + 1 = 65537$ sont premiers.
2. Suivons Euler pour prouver que $F_5 = 2^{32} + 1 = ...$ est divisible par 641 ! !

   Pour cela, remarquer que : $641 = 625 + 16 = 5^4 + 2^4$ et $641 = 64 * 10 + 1 = 2^7 * 5 + 1$ et calculer modulo 641.