

Chapitre 7 : Ensemble des nombres réels et suites numériques.

1 Ordre des réels

1.1 Inégalités

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est muni de relations d'**ordre** ($\leq, \geq, <, >$) permettant de comparer 2 réels et vérifiant (entre autres ...) les règles opératoires suivantes (pour tous réels a, b, c, d) :

- Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$;
- Si $a \leq b$ et $0 \leq c$ alors $ac \leq bc$;
- Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $0 \leq ac \leq bd$;
- Si $a \leq b$ alors $-a \geq -b$;
- Si $0 < a \leq b$ alors $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

Un réel a est dit :

- **positif** quand $a \geq 0$,
- **strictement positif** quand $a > 0$,
- **négatif** quand $a \leq 0$,
- **strictement négatif** quand $a < 0$.

On a de plus la "règle des signes" pour le produit :

	b positif	b négatif
a positif	$a \times b$ positif	$a \times b$ négatif
a négatif	$a \times b$ négatif	$a \times b$ positif

Si a est un réel quelconque, $a^2 \geq 0$ avec égalité si et seulement si $a = 0$.

1.2 Valeur absolue

Rappelons que si a est un réel positif alors $|a| = a$ et si a est négatif alors $|a| = -a$.

Propriété 1 Si a, b sont des réels quelconques :

$$|ab| = |a| |b|$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

La dernière relation s'appelle "inégalité triangulaire".

Rappelons que si a est un réel positif alors $|a| = a$ et si a est négatif alors $|a| = -a$. En particulier, dans tous les cas : $\sqrt{a^2} = |a|$ et, si $b \geq 0$:

$$a^2 = b \iff a = \pm\sqrt{b}$$

Si a est un réel et si b est un réel positif, alors l'ensemble des réels x tel que $|a - x| \leq b$ est un segment de bornes $a - b$ et $a + b$, de longueur $2b$, dit autrement :

$$\{x \in \mathbb{R} / |x - a| \leq b\} = [a - b, a + b]$$

1.3 Parties positives et négatives

Si x est réel, on pose :

- $x^+ = x$ si x est positif, $x^+ = 0$ si x est négatif. x^+ est la **partie positive** de x .
- $x^- = 0$ si x est positif, $x^- = -x$ si x est négatif. x^- est la **partie négative** de x .

Ainsi dans tous les cas : x^+ et x^- sont positifs et :

$$x^+ + x^- = |x| \quad x^+ - x^- = x$$

Ces notations s'utilisent en pratique surtout pour des fonctions réelles.

Si f est une fonction et x est un réel tel que $f(x)$ est défini :

- $f^+(x) = f(x)$ si $f(x)$ est positif, $f^+(x) = 0$ si $f(x)$ est négatif. f^+ est la **partie positive** de f .
- $f^-(x) = 0$ si $f(x)$ est positif, $f^-(x) = -f(x)$ si $f(x)$ est négatif. f^- est la **partie négative** de f .

On peut trouver dans certains ouvrages la fonction sgn parfois bien pratique :

$$\text{sgn} \begin{cases} \text{sgn}(x) = +1 \text{ si } x > 0 \\ \text{sgn}(0) = 0 \\ \text{sgn}(x) = -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Notons que si x et y sont réels : $\text{sgn}(x.y) = \text{sgn}(x).\text{sgn}(y)$.

2 Ensembles de nombres.

Rappelons que $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels** : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, 18, \dots\}$, $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **entiers relatifs** : $\mathbb{Z} = \{\dots, -10, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, 18, \dots\}$

On note si a et b sont entiers (relatifs) : $\llbracket a, b \rrbracket$ l'ensemble des entiers (relatifs) compris (au sens large) entre a et b .

Un nombre réel x est dit **décimal** si il a une écriture décimale finie autrement dit si on peut écrire : $x = \frac{k}{10^n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{k}{10^n} / k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Un nombre réel x est dit **rationnel** si il est le quotient de 2 entiers autrement dit si on peut écrire : $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ (on peut de plus imposer à la fraction précédente d'être irréductible) :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Passons sur la construction de $\mathbb{R}$ (difficile)... On a ainsi des ensembles de nombres :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Les nombres réels non rationnels sont dit **irrationnels** et l'ensemble des irrationnels est noté $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. On verra (on a vu...) que les nombres $\sqrt{2}$, $e = \exp(1)$, π sont des irrationnels. Il y en a bien d'autres. Mieux que ça :

Propriété 2 *Si $a < b$ sont des réels, il existe q un rationnel et x un irrationnel tels que $a < r < b$ et $a < x < b$.*

Autrement dit tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

Sachant que $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, pour unifier certaines notations, on note $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \{-\infty\} \cup]-\infty, +\infty[\cup \{+\infty\}$. $\overline{\mathbb{R}}$ est la **droite réelle achevée**.

On convient alors, pour tout réel x :

$$-\infty < x < +\infty$$

3 Valeurs approchées d'un réel

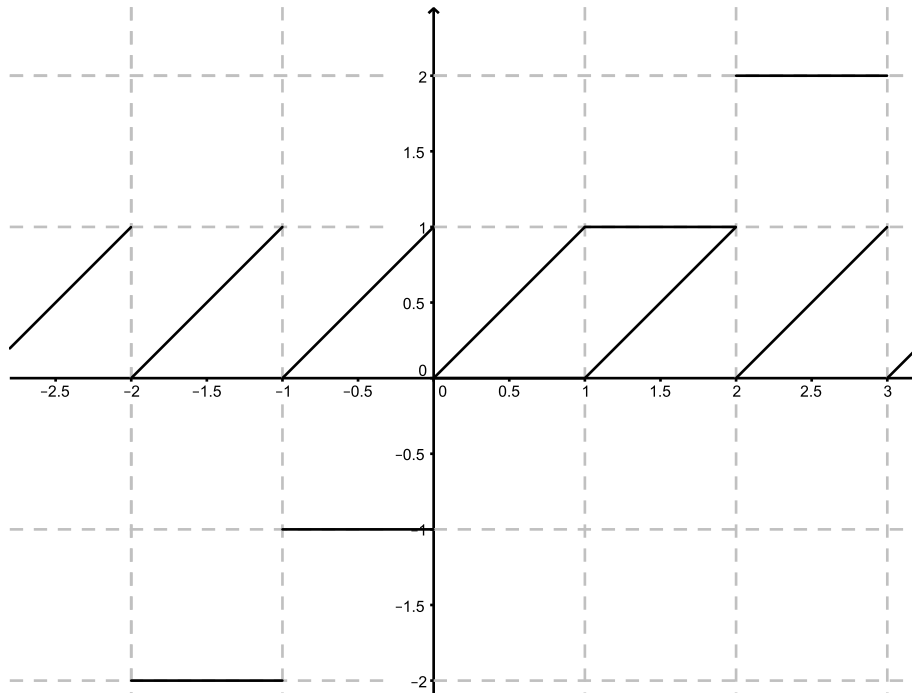
Si x est un réel, il existe un unique entier noté $[x]$ (*floor* pour Python) et appelé **partie entière** de x tel que :

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

On obtient ainsi une fonction "en escalier" croissante.

Si x est réel, $x - [x]$ (parfois noté $\{x\}$) est la partie fractionnaire de x . C'est un réel de $[0, 1[$.

À noter que x (réel) est un entier si, et seulement si $[x] = x$ c'est à dire $\{x\} = 0$.



Si x est un réel et n un entier naturel, on a

$$\frac{[10^n \cdot a]}{10^n} \leq a < \frac{[10^n \cdot a] + 1}{10^n}$$

On pose donc $d_n = \frac{[10^n \cdot x]}{10^n}$ et $d'_n = \frac{[10^n \cdot x] + 1}{10^n}$. Ce sont des nombres décimaux. On a :

$$d_n \leq x < d'_n \text{ et } d'_n - d_n = 10^{-n}$$

d_n et d'_n sont les **valeurs décimales approchées** respectivement par défaut et par excès de x .

On observe que la suite (d_n) tend en croissant vers x et que la suite d'_n tend en décroissant vers x . En pratique, si x est positif, d_n s'obtient à partir x en "enlevant" toutes les décimales de x au delà de la n -ième.

4 Majorant, minorant

Soit A une partie (non vide) de $\mathbb{R}$.

Soit M un nombre réel quelconque.

Définition 1 M est **un majorant** de A quand :

$$(\forall x \in A) \quad x \leq M$$

M est **un minorant** de A quand :

$$(\forall x \in A) \quad M \leq x$$

La partie A est dite **majorée** quand elle admet au moins un majorant (fini). Elle est dite **minorée** quand elle admet au moins un minorant (fini). Elle est dite **bornée** quand elle est à la fois minorée et majorée.

On convient que $+\infty$ majore toute partie de $\mathbb{R}$ et que $-\infty$ mineure toute partie de $\mathbb{R}$.

Ainsi si la partie A est majorée, on note $\text{Sup}(A) < +\infty$, $\text{Sup}(A) = +\infty$ sinon.

Si la partie A est minorée, on note $\text{Inf}(A) > -\infty$, $\text{Inf}(A) = -\infty$ sinon.

Soit maintenant a un élément de A .

Définition 2 a est **le plus grand élément** de A quand :

$$(\forall x \in A) \quad x \leq a$$

On note :

$$a = \text{Max}(A)$$

a est **le plus petit élément** de A quand :

$$(\forall x \in A) \quad a \leq x$$

On note :

$$a = \text{Min}(A)$$

5 Bornes supérieure et inférieure

Soit A une partie (non vide) de $\mathbb{R}$.

Soit M un réel quelconque.

Définition 3 M est **la borne supérieure** de A quand il est le plus petit des majorants possibles de A c'est à dire :

$$(\forall a \in A) \quad a \leq M \quad \text{et} \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists a_\epsilon \in A) \quad M - \epsilon < a_\epsilon \leq M$$

On note alors :

$$M = \text{Sup}(A)$$

Si la partie A n'est pas majorée, on pose :

$$+\infty = \text{Sup}(A)$$

m est **la borne inférieure** de A quand il est le plus grand des minorants possibles de A , c'est à dire :

$$(\forall a \in A) \quad m \leq a \quad \text{et} \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists a_\epsilon \in A) \quad m \leq a_\epsilon < m + \epsilon$$

On note alors :

$$m = \text{Inf}(A)$$

Si la partie A n'est pas minorée, on pose :

$$-\infty = \text{Inf}(A)$$

Les notions de Max et Sup sont reliés par la propriété suivante :

Propriété 3 A est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

La partie A admet un plus grand élément si $\text{Sup}(A) \in A$ et alors $\text{Sup}(A) = \text{Max}(A)$.

La partie A admet un plus grand petit élément si $\text{Inf}(A) \in A$ et alors $\text{Inf}(A) = \text{Min}(A)$.

Le théorème suivant (admis) dit "des bornes Sup et Inf" nous assure dans tous les cas intéressants l'existence des bornes Sup et Inf.

Théorème 1 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Si la partie A est majorée alors elle admet une borne supérieure (dans $\mathbb{R}$). Si la partie A est minorée alors elle admet une borne inférieure (dans $\mathbb{R}$).

Dit autrement :

Théorème 2 Toute partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure éventuellement infinies.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$:

- La partie A est majorée si et seulement si $\text{Sup}(A) < +\infty$.
- La partie A est minorée si et seulement si $-\infty < \text{Inf}(A)$.
- La partie A est bornée si et seulement si $-\infty < \text{Inf}(A) \leq \text{Sup}(A) < +\infty$.
- La partie A admet un plus grand élément si $\text{Sup}(A) \in A$ et alors $\text{Sup}(A) = \text{Max}(A)$.
- La partie A admet un plus grand petit élément si $\text{Inf}(A) \in A$ et alors $\text{Inf}(A) = \text{Min}(A)$.

Un **intervalle** de $\mathbb{R}$ est une partie I de $\mathbb{R}$ vérifiant : Si a et b sont dans I alors $[a, b]$ est dans I .

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ alors, selon sa nature, il est égal à $[\text{Inf}(I), \text{Sup}(I)]$, $] \text{Inf}(I), \text{Sup}(I)[$, $[\text{Inf}(I), \text{Sup}(I)[$, $] \text{Inf}(I), \text{Sup}(I)[$.

Si $\text{Inf}(I)$ et $\text{Sup}(I)$ sont finis et $I = [\text{Inf}(I), \text{Sup}(I)] = [\text{Min}(I), \text{Max}(I)]$, on dit I est un **segment**.

6 Rappels de base.

Une suite réelle est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles :

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \left\{ u = (u_n) : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \in \mathbb{R} \end{cases} \right\}$$

La suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **majorée** quand : $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n < +\infty$.

La suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **minorée** quand : $\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n > -\infty$.

La suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **bornée** quand elle est à la fois minorée et majorée, ou de manière équivalente quand la suite $|u| = (|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

Une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** quand $n \leq n' \implies u_n \leq u_{n'}$ ou de manière équivalente : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \leq u_{n+1}$.

Une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement croissante** quand $n < n' \implies u_n < u_{n'}$ ou de manière équivalente : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n < u_{n+1}$.

Une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** quand $n \leq n' \implies u_n \geq u_{n'}$ ou de manière équivalente : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \geq u_{n+1}$.

Une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** quand $n < n' \implies u_n > u_{n'}$ ou de manière équivalente : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} < u_n$.

Une suite est dite (resp. strictement) **monotone** quand elle est (resp. strictement) croissante ou (resp. strictement) décroissante.

7 Limite d'une suite

7.1 Limite finie

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et l un réel.

Définition 4 On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tend vers** l ou **a la limite** l (en $+\infty$) et on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} u = l \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$$

quand :

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N_\epsilon \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_\epsilon) \quad |u_n - l| \leq \epsilon \quad \text{c'est à dire} \quad l - \epsilon \leq u_n \leq l + \epsilon$$

Une suite est dite **convergente** si elle a une limite (finie). Dans ce cas, la limite est unique et la suite est bornée. Elle est dite **divergente** si elle n'a pas de limite finie.

Propriété 4 Une suite convergente est bornée.

Concernant les inégalités, on a les règles suivantes (attention au passage aux inégalités larges!), $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant des suites et l et l' des réels :

Propriété 5 Si : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n < v_n$ et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l'$ alors :

$$l \leq l'$$

Si : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n < A \in \mathbb{R}$ et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ alors :

$$l \leq A$$

Les règles de calcul suivantes permettent de calculer rapidement les limites finies simples :

Théorème 3 Si les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et si λ est un réel alors les suites $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_n \cdot v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\lambda \cdot u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le sont aussi. En particulier, l'ensemble des suites convergentes est un espace vectoriel réel.

On a de plus les règles opératoires (les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont supposée convergentes, dans le dernier cas, $l \neq 0$) :

suite	u_n	v_n	$u_n + v_n$	$u_n \cdot v_n$	λu_n	$\frac{1}{u_n}$
limite	l	l'	$l + l'$	$l \cdot l'$	λl	$\frac{1}{l}$

Propriété 6 Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 et si la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée alors la suite $(u_n \cdot v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

En pratique, on démontre d'abord cette propriété puis le théorème qui précède.

Théorème 4 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites telles que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq v_n \leq w_n$$

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l :

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$$

Par application directe, on a :

Propriété 7 Si $|u_n| \leq v_n$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

7.2 Limite infinie

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

Définition 5 On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$ ou **a la limite** $+\infty$ (en $+\infty$) et on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ ou } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

quand :

$$(\forall A \in \mathbb{R}_+)(\exists N_A \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_A) \quad u_n \geq A$$

On dit que la suite (u_n) **tend vers** $-\infty$ ou **a la limite** $-\infty$ (en $+\infty$) et on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \text{ ou } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$$

quand :

$$(\forall A \in \mathbb{R}_-)(\exists N_A \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_A) \quad u_n \leq A$$

Rappel : une suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est divergente.

Théorème 5 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites telles que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq v_n$$

Si (u_n) tend vers $+\infty$ alors v_n tend vers $+\infty$.

Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ alors u_n tend vers $-\infty$.

Concernant les règles de calcul, on arrive vite sur des cas d'indétermination (notés ici FI) : il n'y a pas de règle générale, il faut voir au cas par cas. Le tableau suivant à lire ligne par ligne au sens "la suite tend vers" donne quelques cas classiques :

u_n	v_n	$u_n + v_n$	$u_n \cdot v_n$	$\frac{u_n}{v_n}$	$\frac{1}{u_n}$
l finie non nulle	l' finie non nulle	$l + l'$	$l \cdot l'$	$\frac{l}{l'}$	$\frac{1}{l}$
$l > 0$ finie	0^+	l	0	$+\infty$	$\frac{1}{l}$
$l > 0$ finie	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$\frac{1}{l}$
0^+	0^+	0	0	FI " $\frac{0}{0}$ "	$+\infty$
0^+	$+\infty$	$+\infty$	FI " $0 \cdot \infty$ "	0	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	∞	$+\infty$	FI " $\frac{\infty}{\infty}$ "	0
$+\infty$	$-\infty$	FI " $\infty - \infty$ "	$-\infty$	FI " $\frac{\infty}{-\infty}$ "	0

Ici, on note $u_n \rightarrow 0^+$ pour $u_n \rightarrow 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

8 Théorèmes d'existence de limites

Le théorème clef concernant l'existence de limites est le suivant.

Théorème 6 (Théorème de la limite monotone) *Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite monotone alors elle admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

Plus précisément :

- *Si (u_n) est croissante, alors elle converge (vers une limite finie) si et seulement si elle est majorée, sinon elle tend vers $+\infty$. Dans les 2 cas, on a :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$$

- *Si (u_n) est décroissante, alors elle converge (vers une limite finie) si et seulement si elle est minorée, sinon elle tend vers $-\infty$. Dans les 2 cas, on a :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$$

On rencontrera souvent la situation des "suites adjacentes".

Théorème 7 (Première version) *Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont 2 suites telles que :*

- *$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante,*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.*

alors les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l'$ avec $l \leq l'$.

Théorème 8 (Seconde version : "vrai théorème des suites adjacentes") *Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont 2 suites telles que :*

- *$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante,*
- *$v_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,*

alors les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et convergent vers la même limite l et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leq u_{n+1} \leq l \leq v_{n+1} \leq v_n$$

*Dans ce cas, on dit que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **adjacentes**.*

9 Suites extraites

Soit $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha(n) \geq n$. Une **suite extraite** la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite du type $(u_{\alpha(n)})_{n \in \mathbb{N}}$. Par exemple, les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites extraites de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Propriété 8 Si $(u_{\alpha(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ ($l \in \overline{\mathbb{R}}$) alors $u_{\alpha(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$

En particulier, il suit que si on peut extraire d'une même suite 2 suites tendant vers des limites différentes alors la première n'a pas de limite (finie ou infinie). Attention aux (pseudo...)réciproques de cette propriété ... Cependant :

Propriété 9 Si les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers la même limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ alors u_n tend vers l .

Un théorème célèbre :

Théorème 9 (Théorème de Bolzano-Weierstrass) De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

10 Quelques propriétés des ensembles de nombres

Définition 6 Une partie de $\mathbb{R}$ est dite **dense dans** $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.

Les ensembles $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Une caractérisation des parties denses :

Propriété 10 Une partie A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout x dans $\mathbb{R}$ il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans A tel que $x_n \rightarrow x$.

Autre application : on considère une partie A non vide de $\mathbb{R}$ et $M \in \overline{\mathbb{R}}$:

Propriété 11 On a $M = \text{Sup}(A)$ si et seulement si :

- M est un majorant de A et :
- Il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de point de A tel que $x_n \rightarrow M$.

11 Suites complexes.

Une **suite complexe** est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. On note $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites complexes :

$$\mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \left\{ u = (u_n) : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \\ n \mapsto u_n \in \mathbb{C} \end{cases} \right\}$$

A toute suite complexe (u_n) , on associe 2 suites réelles : ses **parties réelles et imaginaires** : $(\text{Re}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\text{Im}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \text{Re}(u_n) + i \cdot \text{Im}(u_n)$

Définition 7 On dit que la suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers le nombre complexe l qui est du coup sa **limite** quand les 2 conditions équivalentes suivantes sont réalisées :

- $\begin{cases} \operatorname{Re}(u_n) \rightarrow \operatorname{Re}(l) \\ \operatorname{Im}(u_n) \rightarrow \operatorname{Im}(l) \end{cases}$
- $|u_n - l| \rightarrow 0$.

On montre, comme dans le cas réel :

Théorème 10 Si les suites complexes (u_n) et (v_n) sont convergentes et si λ est un complexe alors les suites $(u_n + v_n)$, $(u_n \cdot v_n)$, $(\lambda \cdot u_n)$ le sont aussi.

On a de plus les règles opératoires (les suites (u_n) et (v_n) sont supposée convergentes, dans le dernier cas, $l \neq 0$) :

suite	u_n	v_n	$\overline{u_n}$	$u_n + v_n$	$u_n \cdot v_n$	λu_n	$\frac{1}{u_n}$
limite	l	l'	$\overline{l}$	$l + l'$	$l \cdot l'$	λl	$\frac{1}{l}$

Les notions de suite monotone, majorée ... n'ont pas de sens pour les suites complexes. Par contre, on dit qu'une suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **bornée** quand la suite réelle $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est et on montre :

Théorème 11 (Théorème de Bolzano-Weierstrass) De toute suite complexe bornée, on peut extraire une suite convergente

12 Quelques familles classiques de suites

12.1 Les suites arithmétiques et géométriques

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **arithmétique** de **raison** r quand on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

On a alors, si $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + n \cdot r$$

$$\sum_{k=1}^n u_k = n \cdot \frac{u_n + u_1}{2}$$

Une suite arithmétique réelle de raison $r > 0$ tend vers $+\infty$.

Une suite arithmétique réelle de raison $r < 0$ tend vers $-\infty$.

Une suite (u_n) est **géométrique** de **raison** $r \in \mathbb{C}$ quand on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n \cdot r$$

On a alors, si $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 \cdot r^n$$

Une suite géométrique de raison $r \in \mathbb{C}$ avec $|r| < 1$ tend vers 0.

Une suite géométrique réelle de raison $r > 1$ tend vers $\pm\infty$ en fonction du signe de u_0 .

Si u_n est géométrique, les sommes de ses termes se calculent en utilisant la formule de la série géométrique :

Si $r \neq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

12.2 Les suites arithmético-géométriques

On appelle suite **arithmético-géométrique** une suite vérifiant la relation de récurrence : pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = a.u_n + b$ avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$ complexes.

On pose $\lambda = \frac{b}{1-a}$. On observe alors que $\lambda = a.\lambda + b$ et que $(u_{n+1} - \lambda) = a.(u_n - \lambda)$.

Autrement dit : la suite $(u_n - \lambda)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a ce qui permet son expression explicite.

12.3 Les suites linéaires récurrentes d'ordre 2

On appelle suite **linéaire homogène récurrente d'ordre 2** une suite vérifiant une relation de récurrence du type : pour $n \in \mathbb{N}$:

$$(R) : u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$$

avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$ complexes fixés. Notons qu'une telle suite est uniquement déterminée par les valeurs de u_0 et u_1 .

On lui associe l'équation caractéristique :

$$(E_c) : r^2 = a.r + b$$

Théorème 12 Si l'équation (E_c) a 2 racines distinctes r_1 et r_2 alors il existe λ et μ 2 constantes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

Si l'équation (E_c) a 1 racine double r alors il existe λ et μ 2 constantes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \lambda r^n + \mu n.r^n$$

Dans les 2 cas, on détermine si besoin λ et μ à l'aide des "conditions initiales" c'est à dire des valeurs de u_0 et u_1 .

Si la suite (u_n) est réelle, on a en général intérêt à la voir comme une suite complexe puis retrouver une forme réelle à l'aide des formules d'Euler.

12.4 Les suites $u_{n+1} = f(u_n)$

L'étude des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où f est une fonction réelle à variable réelle ; est un sujet classique qui occupera nombre d'exercices. Nous nous contentons ici de quelques remarques.

Propriété 12 Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ **stable** par f c'est à dire : $f(I) \subset I$ et $u_0 \in I$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in I$.

Propriété 13 Si $u_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ et f est continue en l alors $f(l) = l$.

Savoirs et savoirs faire indispensables

Savoir

Définitions d'un majorant, d'un minorant, d'un plus grand élément, d'un plus petit élément, d'une borne supérieure, d'une borne inférieure.

Théorèmes de convergence monotone.

Savoir faire

Étude des suites simples.