Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 2023-2024.

# Fiche 20 : Td du 09-11.

**Exercice 1**

Résoudre l'équation différentielle d'inconnue $y : t \to y(t)$ fonction réelle dérivable définie sur $\mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) = 2\cos(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

**Exercice 2**

Donner la solution générale réelle de l'équation différentielle d'inconnue $y : x \to y(x)$ :

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 2x$$

**Exercice 3**

Calculer des primitives des fonctions suivantes en précisant le domaine des calculs faits :

$$\frac{x^2}{x^2+2x+5} \qquad ; \qquad \frac{1}{\cosh(x)}$$

Pour la seconde, on pourra poser : $u = \exp(x)$.

**Exercice 4**

Donner la solution générale pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle :

$$ty'(t) - y(t) = t^2 e^t$$

**Exercice 5**

On considère les équations différentielles (variable $x \in \mathbb{R}$) :

$$(E) : (1-x^2)y' + xy = 1, \quad (E_0) : (1-x^2)y' + xy = 0$$

1. Montrer que $f : x \to y(x) = x$ est une solution particulière de $(E)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre $(E_0)$ pour $-1 < x < 1$ en donnant sa solution générale.
   On considère $f_0$ la solution définie pour $-1 < x < 1$ vérifiant $f_0(0) = 1$.
3. Étudier la fonction $f_0$, tracer son graphique ainsi que celui d'autres solutions de $(E_0)$ sur l'intervalle $]-1,1[$.
4. Résoudre $(E_0)$ pour $x > 1$ en donnant sa solution générale.
5. En étudiant une des solutions précédentes, tracer le graphique d'un certain nombre de solutions de $(E_0)$ sur l'intervalle $]1,\infty[$.
6. Résoudre $(E_0)$ pour $x < -1$ en donnant sa solution générale.
7. Tracer le graphique d'un certain nombre de solutions de $(E_0)$ sur l'intervalle $]-\infty,-1[$.
8. Donner la solution générale de $(E)$ sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]-1,1[$. Donner sur un même graphique l'allure de quelques solutions.

**Exercice 6**

Pour $\lambda > 0$ on pose $f(x) = \exp(\lambda x)$ et on considère par ailleurs l'équation d'inconnue $x$ réelle :

$$(E) \quad \exp(\lambda \exp(\lambda x)) = x$$

1. Étudier les variations de la fonction $f$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que si $f(x) = x$ alors $x$ est solution de $(E)$.
3. Montrer réciproquement que si $x$ est solution de $(E)$ alors $f(x) = x$ (*on pourra procéder par l'absurde ou par contraposée*).
4. Étudier sur $\mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = f(x) - x$.
5. En déduire en fonction de $\lambda$ le nombre de solution de $(E)$.
   *On posera $u = \frac{-\ln(\lambda)}{\lambda}$ et on montrera que le nombre de solution de $(E)$ dépend du signe de $g(u)$.*