Fiche 21 : Arithmétique. .

Exercice 1

Soit a un entier relatif quelconque, démontrer que le nombre $a(a^2-1)$ et, plus généralement, $a(a^{2n}-1)$ est divisible par 6.

Exercice 2

Étant donnés deux nombres relatifs n et p montrer que soit np est pair, soit n^2-p^2 est divisible par 8.

Exercice 3

Justifier le critère de divisibilité par 7 suivant :

Sépare en unités et dizaines puis cherche la différence entre le double des unités et les dizaines. Agis ainsi tant que tu as des dizaines et obtiens zéro ou sept. Ainsi 364 devient 28 puis 14 puis enfin 7.

On pourra écrire une relation de Bezout entre 7 et 10.

Exercice 4

Démontrer que :

1. 2^n+1 est divisible par 3 si et seulement si n est impair ;
2. $3^{2n+1}+2^{4n+2}$ est divisible par 7 ;
3. 11 divise $2^{6n+3}+3^{2n+1}$

Exercice 5 : Fonctions d'Euler

Sur $\mathbb{N}^*$, on considère d et σ les fonctions qui a un nombre n associent respectivement :

— $d(n)$ le nombre de ses diviseurs entiers naturels (y compris n lui même).

— $\sigma(n)$ la somme de ses diviseurs entiers naturels (y compris n lui même).

1. Si p est un entier premier et $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer $d(p^k)$ et $\sigma(p^k)$.
2. Montrer que si n et m sont premiers entre eux alors $d(n\times m)=d(n)\times d(m)$ et $\sigma(n\times m)=\sigma(n)\times\sigma(m)$.

Exercice 6

Montrer que les nombres $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ et $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ sont irrationnels.