Fiche 23 : TD du 16-11

Exercice 1

Déterminer "les" primitives suivantes :

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2+x+5} \quad ; \quad \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Pour la seconde, 2 méthodes sont possibles : une intégration par parties ou un changement de variables.

Exercice 2

Donner la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y'(x)+y(x)=\frac{e^x}{1+2e^x}$$

Exercice 3

Résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\cos x & = & -\frac{3}{5}\\ \sin x & = & -\frac{4}{5}\end{array}\right. ,$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

Établir l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$$

Exercice 5

On considère la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left[\sin\left(\arccos(\cos(x))\right)\right]$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est paire.
3. Montrer que :
$$\forall u \in [-1,1],\ \arccos(-u)+\arccos(u)=\pi.$$
4. En déduire que f est π-périodique.
5. Tracer le graphe de f. Justifier.

Exercice 6

Soit $p \geq 2$ un nombre premier.

1. Si $a \in [\![1,p-1]\!]$ alors il existe $b \in 1,p-1$ tel que $ab \equiv 1[p]$.
2. Si $a \in [\![1,p-1]\!]$ alors $a^2 \in 1[p]$ si et seulement si $a=1$ ou $p-1$.
3. Montrer le théorème de Wilson :
$$(p-1)! \equiv -1[p]$$
4. En montrer la réciproque suivante : si n est un entier et $(n-1)! \equiv -1[n]$ alors n est premier. On pourra montrer que si $n \geq 6$ n'est pas premier alors $(n-1)! \equiv 0[n]$

Exercice 7

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n)+f(f(n))=2n. \tag{1}$$

1. Soit dans cette question $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. On suppose que f vérifie la relation proposée.
   (a) Montrer que $f(0)=0$.
   (b) Soient $p,q \in \mathbb{N}$ tels que $f(p)=f(q)$. Démontrer que $p=q$.
   (c) On suppose qu'il existe un entier naturel n tel que $\forall k \in [\![0,n]\!],\ f(k)=k$. Démontrer que $f(n+1)=n+1$.
2. Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui vérifient la relation (1).