Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 17 Novembre 2023.

DS 3, Durée 2 h 30, Calculatrices interdites.

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle d'inconnue $y : t \to y(t)$ fonction réelle dérivable définie sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) = e^{-t} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 2

Donner la solution générale réelle de l'équation différentielle d'inconnue $y : x \to y(x)$:

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = \sin(2x)$$

Exercice 3

Calculer une primitive de la fonction $x \to \frac{x^2}{x^2+2x+5}$, primitive qu'on pourra noter : $\int \frac{x^2 \,\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}$ (domaine du calcul à préciser).

Exercice 4

Éventuellement en utilisant la méthode de la variation de la constante, donner la solution générale pour $x > 0$ de l'équation différentielle d'inconnue y :

$$xy'(x) + y(x) = \cos(x)$$

Exercice 5

On se propose de calculer pour $x \in \mathbb{R}$ une primitive sur $\mathbb{R}$ de l'expression : $\sqrt{x^2+1}$.

On rappelle que si u est réel alors $\sinh(u) = \frac{e^u+e^{-u}}{2}$ et $\cosh(u)^2 = \sinh(u)^2 + 1$.

1. Faire le changement de variable $x = \sinh(u)$ pour déterminer une primitive de l'expression : $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, primitive qu'on pourra noter : $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$
2. Faire le une intégration par parties pour déterminer une primitive de l'expression : $\sqrt{1+x^2}$, primitive qu'on pourra noter : $\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Exercice 6

1. Montrer (on pourra faire une récurrence) que si $n \geq 0$ et $k \geq 1$ sont des entiers alors :

$$2^{2^{n+k}} - 1 = \left(2^{2^n} - 1\right) \times \prod_{i=0}^{k-1} (2^{2^{n+i}} + 1).$$

2. On pose, si $n \geq 0$ est entier, $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que pour $m \neq n$ entiers naturels, F_n et F_m sont premiers entre eux. *On pourra faire apparaitre une relation de Bezout.*
3. Montrer que le résultat précédent implique que l'ensemble des entiers premiers est infini.

Exercice 7

Les entiers considérés ici sont tous des entiers naturels.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\sigma(n)$ la somme de ses diviseurs entiers naturel (y compris lui même).

On rappelle et on ne demande pas de prouver que si k et n entiers sont premiers entre eux alors :

$$\sigma(n \times k) = \sigma(n)\sigma(k)$$

On appelle **parfait** un entier naturel n tel que $\sigma(n) = 2n$.

1. Si $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, quelle est la valeur de $\sigma(n)$.
2. Vérifier que 6 et 28 sont parfaits.
3. Si $a \geq 2$, $n \geq 2$ sont entiers et $a^n - 1$ est premier, montrer que $a = 2$ et n est premier.
   On pourra utiliser la contraposée.
   Dans la suite, on note, pour p premier $M_p = 2^p - 1$.
4. Montrer que si p et M_p sont premiers alors $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait.
5. On cherche à montrer que si n est un entier parfait pair alors il existe p et M_p premiers tel que $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$.

   On considère donc n un entier parfait pair en on note $n = 2^{p-1}i$ avec i impair, $p \geq 2$.

   (a) En utilisant le lemme de Gauss, montrer que $2^p - 1 | i$.
   On note donc $i = k(2^p - 1)$, k entier.
   (b) Justifier que $\sigma(i) = 2^p k$ et en déduire que $k = 1$ et que i est premier.
   (c) Conclure.