Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 17 Novembre 2023.

DS 3, Correction rapide.

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle d'inconnue $y : t \to y(t)$ fonction réelle dérivable définie sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) = e^{-t} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$y(t) = te^{-t}$$

Exercice 2

Donner la solution générale réelle de l'équation différentielle d'inconnue $y : x \to y(x)$:

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = \sin(2x)$$

$$y(x) = e^{-x}(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)) + \frac{-2\cos(2x) - \sin(2x)}{10}$$

Exercice 3

Calculer une primitive de la fonction $x \to \frac{x^2}{x^2+2x+5}$, primitive qu'on pourra noter : $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}$ (domaine du calcul à préciser).
Sur $\mathbb{R}$:

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+5} = x - \ln(x^2+2x+5) - \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Exercice 4

Éventuellement en utilisant la méthode de la variation de la constante, donner la solution générale pour $x > 0$ de l'équation différentielle d'inconnue y :

$$xy'(x) + y(x) = \cos(x)$$

Sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y(x) = \frac{\lambda + \sin(x)}{x}$$

Exercice 5

On se propose de calculer pour $x \in \mathbb{R}$ une primitive sur $\mathbb{R}$ de l'expression : $\sqrt{x^2+1}$.

1. Avec $x = \sinh(u)$:
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\cosh(u)}{\cosh(u)}\,\mathrm{d}u = u$$
Mais $x = \sinh(u)$ si seulement si $(e^u)^2 - 2x(e^u) + 1 = 0$: $e^u = x + \sqrt{1+x^2}$: $u = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$
2. $$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{(x^2+1)-1\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$$
Donc :
$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)$$

Exercice 6

1. Si $n \geq 0$, on fait une récurrence sur k en remarquant que : et $k \geq 1$ sont des entiers alors :
$$2^{2^{n+1}} - 1 = \left(2^{2^n}\right)^2 - 1 = \left(2^{2^n} - 1\right)\left(2^{2^n} + 1\right)$$
qui est la formule pour $k = 1$.
Ensuite si
$$2^{2^{n+k}} - 1 = \left(2^{2^n} - 1\right) \times \prod_{i=0}^{k-1}(2^{2^{n+i}} + 1).$$
alors
$$2^{2^{n+k+1}} - 1 = \left(2^{2^{n+k}}\right)^2 - 1 = (2^{2^{n+k}} - 1)(2^{2^{n+k}} + 1) = \left(2^{2^n} - 1\right)\left(\times \prod_{i=0}^{k-1}(2^{2^{n+i}} + 1)\right)(2^{2^{n+k}} + 1)$$
$$\left(2^{2^n} - 1\right) \times \prod_{i=0}^{k-1}(2^{2^{n+i}} + 1).$$
C'est à dire :
$$2^{2^{n+k+1}} - 1 = \prod_{i=0}^{k}(2^{2^{n+i}} + 1).$$
Qui est la formule cherchée au rang $k+1$.
2. On a si $n < n+k$ sont entiers :
$$F_{n+k} - 2 = F_n F_{n+1} ... F_{n+k-1}$$
$$F_{n+k} - F_n F_{n+1} ... F_{n+k-1} = 2$$
Par Bezout les diviseurs communs potentiels de F_{n+k} et F_n sont 1 et 2 mais F_n est impair.
Donc F_{n+k} et F_n sont premiers entre eux.

3. L'ensemble des entiers premiers est infini car les diviseurs premiers de F_n et $F_{n'}$ sont toujours différents pour $n \neq n'$ dans $\mathbb{N}$.

Exercice 7

Les entiers considérés ici sont tous des entiers naturels.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\sigma(n)$ la somme de ses diviseurs entiers naturel (y compris lui même).

On rappelle et on ne demande pas de prouver que si k et n entiers sont premiers entre eux alors :

$$\sigma(n \times k) = \sigma(n)\sigma(k)$$

On appelle **parfait** un entier naturel n tel que $\sigma(n) = 2n$.

1. Si $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, $\sigma(n) = 2k + 1 - 1$.
2. 6 a pour diviseurs stricts 1,2,3 et 28 a pour diviseurs stricts 1,2,4,7,14. 6 et 28 sont parfaits.
3. Si $a \geq 2$, $n \geq 2$ sont entiers et $a^n - 1$ est premier, $a = 2$ et n est premier.
   Fait en classe avec l'identité géométrique.
   Dans la suite, on note, pour p premier $M_p = 2^p - 1$.
4. Si p et M_p sont premiers alors si $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$

   $$\sigma(n) = \sigma(2^{p-1})\sigma(M_p) = (2^p - 1)(M_p + 1) = 2n$$

   Donc n et parfait.
5. On considère n un entier parfait pair en on note $n = 2^{p-1}i$ avec i impair, $p \geq 2$.
   (a) On a
   $$\sigma(n) = 2n = 2^p i = \sigma(2^{p-1})\sigma(i) = (2^p - 1)\sigma(i)$$
   en utilisant le fait que 2^{p-1} et i sont premiers entre eux.
   $2^p - 1$ et 2^p étant premiers entre eux, on en déduit que $2^p - 1 | i$:
   On note donc $i = k(2^p - 1)$, k entier.
   (b) Après simplification : $\sigma(i) = 2^p k$
   Si $k > 1$ alors $1 < k < k(2^p - 1)$ sont des diviseurs de i de somme $2^p k + 1 > \sigma(i)$. C'est impossible.
   Donc $k = 1$, $i = 2^p - 1$, $\sigma(i) = 2^p$ donc i est premier, $2^p - 1 | i$ donc $2^p - 1 = M_p = i$ est premier.
   (c) les nombres parfaits pairs sont donc de la forme :
   $$2^{p-1}(2^p - 1)$$
   avec M_p et donc p premier.