Fiche 27 : TD du 30-11.

Exercice 1 : Une suite récurrente.

Étudier et déterminer la limite éventuelle de la suite donnée par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$$

Exercice 2 : Une approche de $\sqrt{2}$.

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et (on admettra que cette définition ne pose pas de problème) :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \quad , \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n \leq v_n$$
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l.
4. Montrer que $l = \sqrt{2}$.
(On pourra montrer que la suite $(u_n.v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante).
5. Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$:
$$v_n - u_n \leq \frac{1}{2^{(2^n)}}$$

Exercice 3

On considère la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers définie par $G_0 = 0$, $G_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $G_{n+1} = G_{n-1} + 2G_n$.

On considère par ailleurs la suite de réels donnée par (on admettra que cette définition est possible) :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{Si } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 2} \end{cases}$$

1. Résoudre l'équation $X^2 = 1 + 2X$. On notera $\alpha > \beta$ ses solutions.
2. Donner l'expression de G_n en fonction de n, α et β.
3. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = \frac{G_n}{G_{n+1}}$$
4. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On pourra utiliser l'expression trouvée à la question précédente.
5. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$:
$$G_{n+3} = 5G_{n+1} + 2G_n$$
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: G_{3n} est un multiple de 5.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: G_{4n} est un multiple de 12.