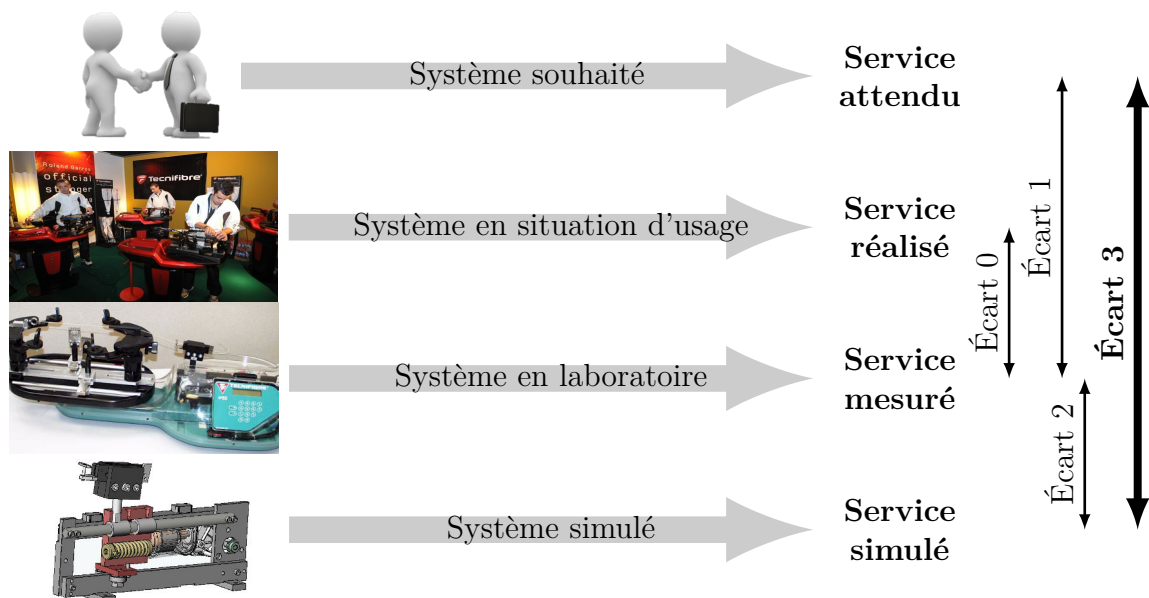


Modélisation des systèmes et paramétrage cinématique

— *Éléments de correction des TDs* —



Écart 0 – évalue la fiabilité et la fidélité du système de laboratoire didactisé par rapport au système réel. Il répond aux questions « le système de laboratoire est-il représentatif du système réel ? Permet-il de l'étudier de manière fiable ? »

Écart 1 – évalue le respect du CDCF par le système réel sur prototype instrumenté en laboratoire. Il répond à la question « le système réalisé, répond-il au CDCF ? ».

Écart 2 – évalue la fiabilité du modèle et de ses hypothèses. Il répond à la question « le modèle est-il correct ? ».

Écart 3 – évalue, en phase de conception, le respect du CDCF à partir d'un modèle simulé. Il répond à la question « le modèle du système satisfait-il les exigences du CDCF ? ».

Activités de TD

Exercices

Exercice 1 – Modélisation cinématique de trois systèmes	3
Exercice 2 – Extracteur de pièces de fonderie	7
Exercice 3 – Mécanisme de levage.....	10
Exercice 4 – Échelle Pivotante Automatique à commande Séquentielle	12
Exercice 5 – Pompe hydraulique à pistons radiaux	14
Exercice 6 – Modélisation du système de distribution VTEC.....	16
Exercice 7 – Système d'aide à la navigation.....	18



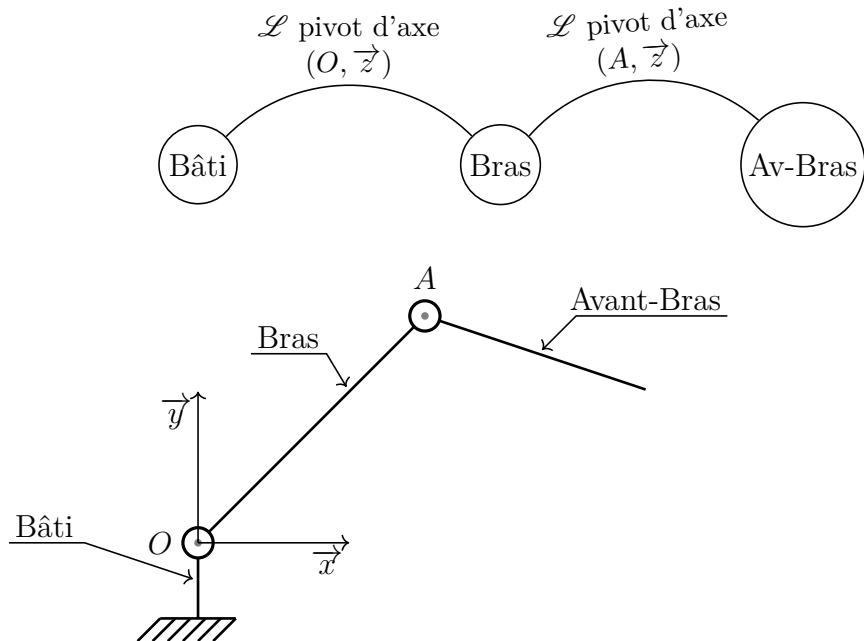
Nicolas Mesnier, lycée Jean Perrin, Lyon
Compléments & mises à jour sur le site des MPSI
<https://cahier-de-prepa.fr/mpsi-perrin>

— Version du 8 janvier 2024 —

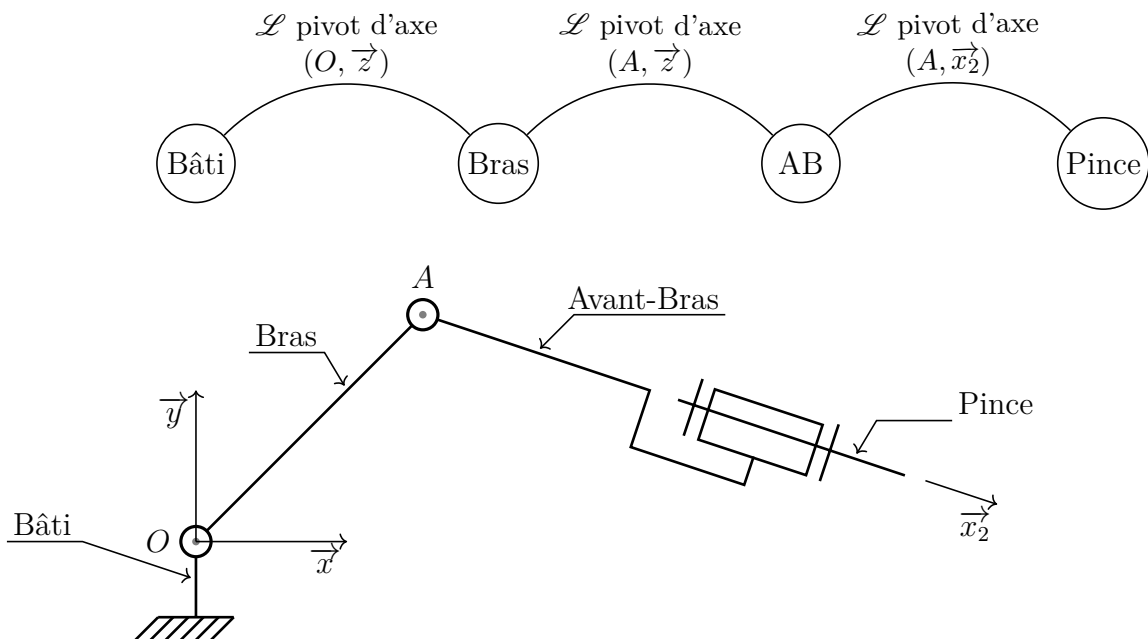
Modélisation cinématique de trois systèmes

1.1 Robot Ericc3

Sous-système 1



Sous-système 2



Sous-système 3

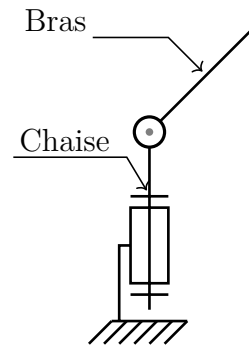
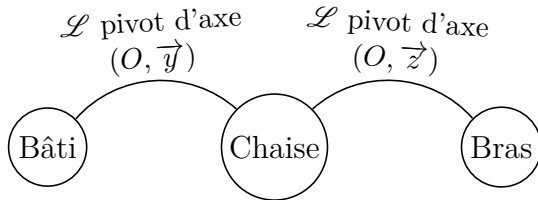
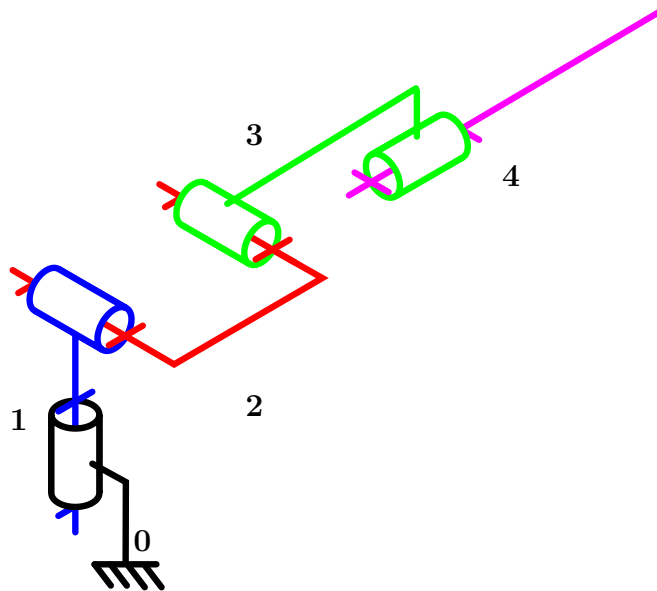
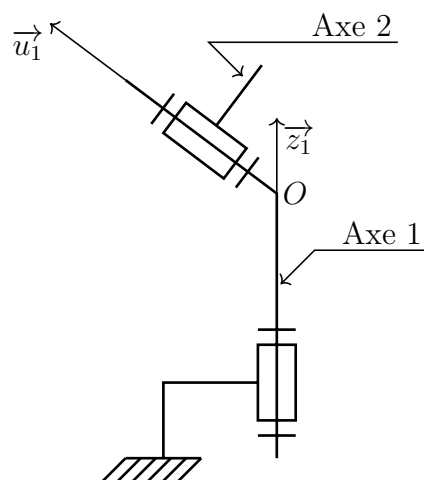
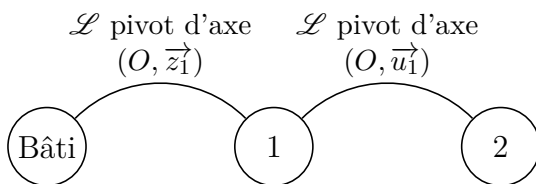
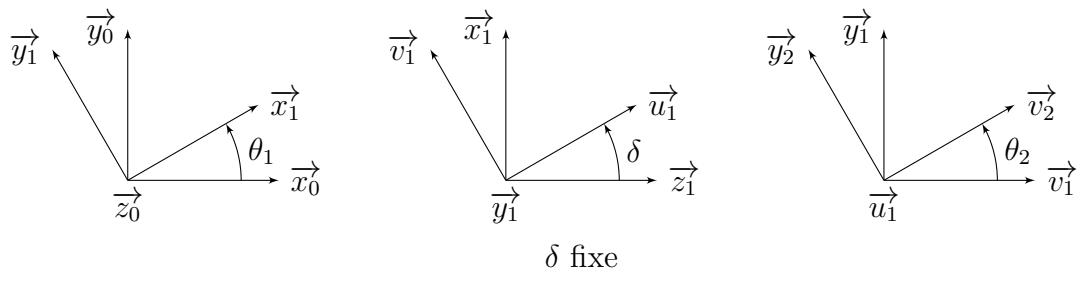


Schéma cinématique de l'ensemble du robot :

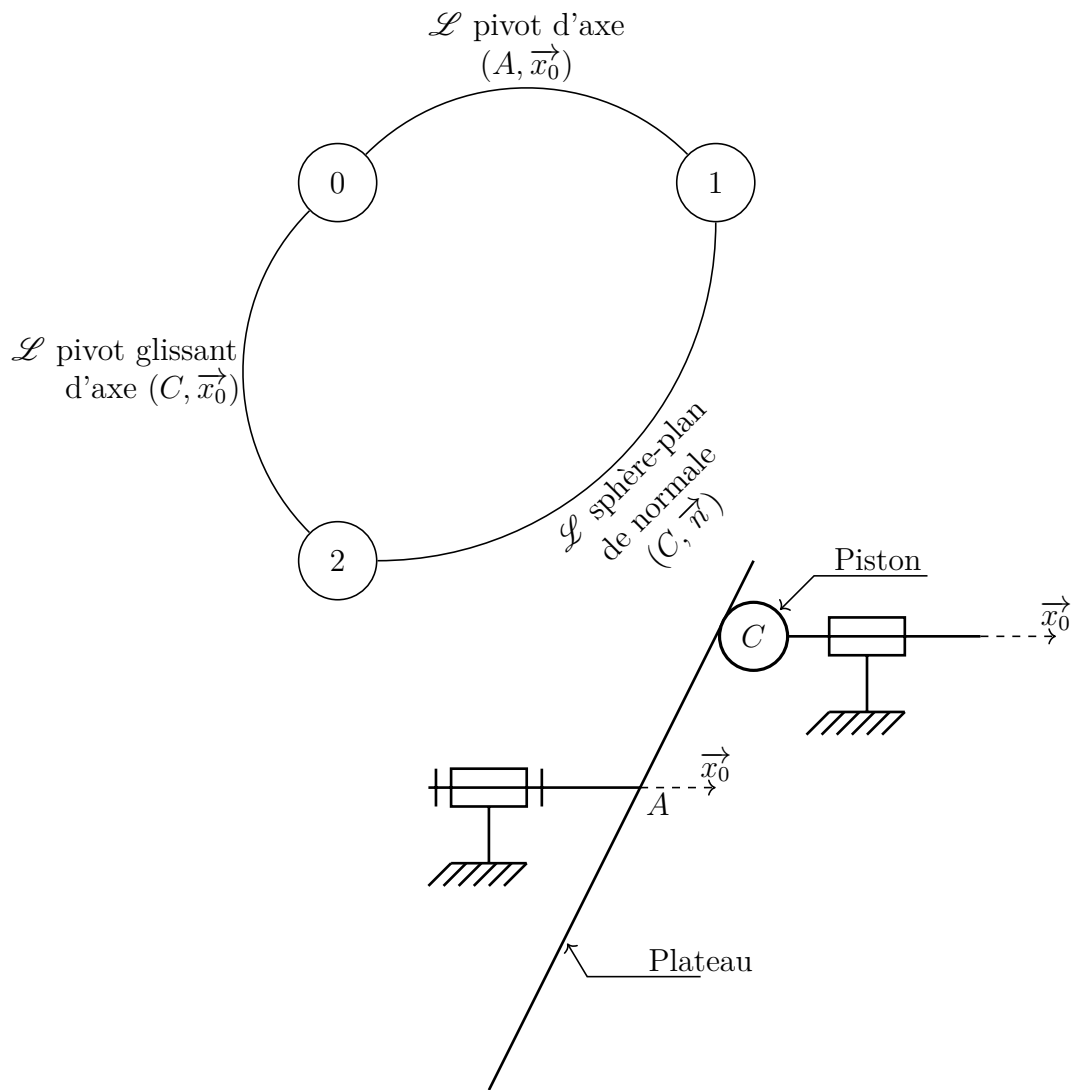


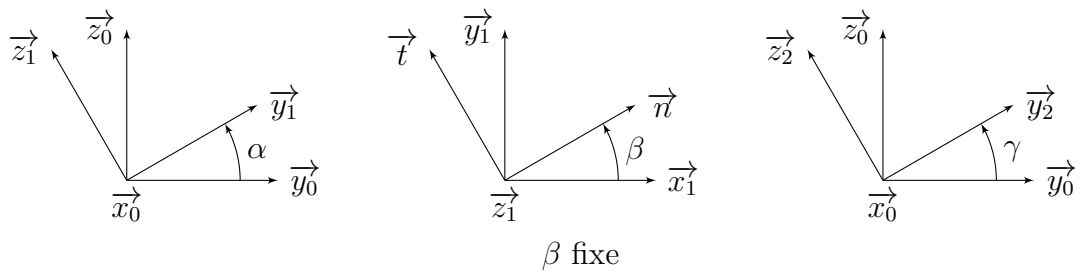
1.2 Tête de fraise Huron





1.3 Pompe à pistons axiaux





Le mouvement d'entrée est associé à l'angle α .

Le mouvement de sortie est associé à la position λ telle que

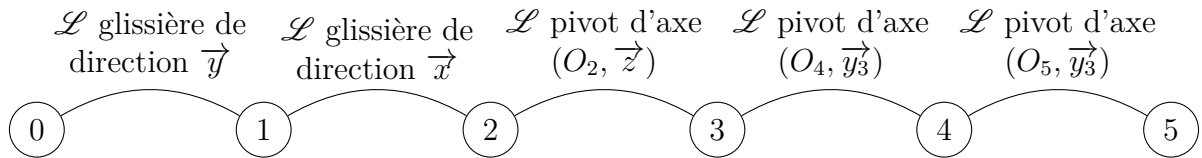
$$\overrightarrow{AC'} = \lambda \overrightarrow{x_0} + h \overrightarrow{y_0}, \quad \lambda \text{ variable.}$$

L'angle γ est une mobilité interne.

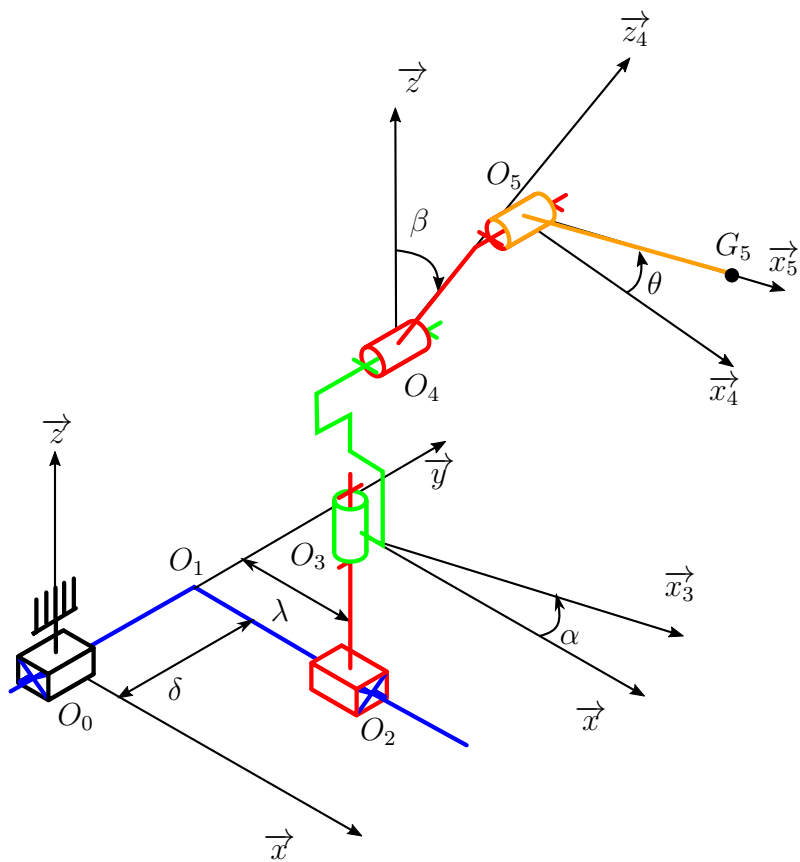
— EXERCICE 2 —

Extracteur de pièces de fonderie

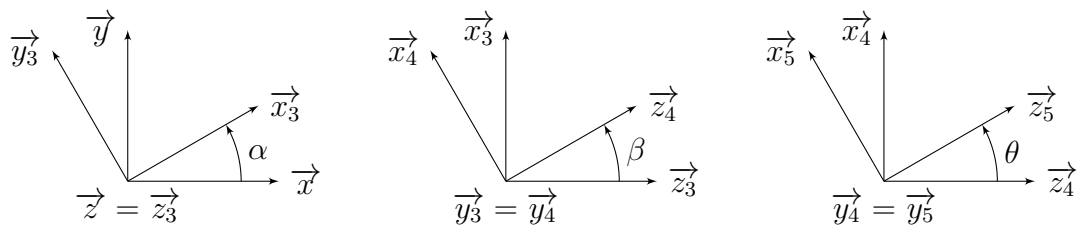
Question 2.1.



Question 2.2.



Question 2.3.



Question 2.4. Par relation de Chasles, il vient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O_0 G_5} &= \overrightarrow{O_0 O_1} + \overrightarrow{O_1 O_2} + \overrightarrow{O_2 O_3} + \overrightarrow{O_3 O_4} + \overrightarrow{O_4 O_5} \\ &= \delta \vec{y} + \lambda \vec{x} + (c + d) \vec{z} + h \vec{z}_4 + b \vec{x}_5\end{aligned}$$

Question 2.5. D'après la figure géométrale reliant les bases $\mathcal{B}_4$ et $\mathcal{B}_5$, on a :

$$\vec{x}_5 = \cos(\theta) \vec{x}_4 - \sin(\theta) \vec{z}_4$$

Question 2.6. Comme les bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_2$ sont confondues, on a $\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \vec{0}$.

D'après la première figure géométrale de normale $\vec{z}$ et de variation d'angle $\dot{\alpha}$, il vient :

$$\overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \dot{\alpha} \vec{z}$$

De même, avec les deux autres figures géométrales, on trouve :

$$\overrightarrow{\Omega_{4/3}} = \dot{\beta} \vec{y}_3 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Omega_{5/4}} = \dot{\theta} \vec{y}_3$$

Il vient alors par composition des taux de rotation :

$$\overrightarrow{\Omega_{4/0}} = \overrightarrow{\Omega_{4/3}} + \overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \dot{\beta} \vec{y}_3 + \dot{\alpha} \vec{z}$$

et

$$\overrightarrow{\Omega_{5/0}} = \overrightarrow{\Omega_{5/4}} + \overrightarrow{\Omega_{4/0}} = (\dot{\beta} + \dot{\theta}) \vec{y}_3 + \dot{\alpha} \vec{z}$$

Question 2.7.

$$\begin{aligned}\vec{z} \wedge \vec{z}_4 &= \vec{z}_3 \wedge \vec{z}_4 = \sin(\beta) \vec{y}_3 \\ \vec{y}_3 \wedge \vec{z}_4 &= \vec{y}_4 \wedge \vec{z}_4 = \vec{x}_4 \\ \vec{z} \wedge \vec{x}_5 &= \vec{z}_3 \wedge \vec{x}_5 = \cos(\theta + \beta) \vec{y}_3 \\ \vec{y}_3 \wedge \vec{x}_5 &= \vec{y}_5 \wedge \vec{x}_5 = -\vec{z}_5\end{aligned}$$

Question 2.8. Par définition, la vitesse du point G_5 appartenant à $\mathbf{5}$ dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ est

$$\overrightarrow{V_{G_5,5/0}} = \left. \frac{d\overrightarrow{O_0 G_5}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = \dot{\delta} \vec{y} + \dot{\lambda} \vec{x} + h \left. \frac{d\vec{z}_4}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} + b \left. \frac{d\vec{x}_5}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0}$$

Avec, par formule de dérivation vectorielle :

$$\begin{aligned}\left. \frac{d\vec{z}_4}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} &= \underbrace{\left. \frac{d\vec{z}_4}{dt} \right|_{\mathcal{B}_4}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega_{4/0}} \wedge \vec{z}_4 = (\dot{\beta} \vec{y}_3 + \dot{\alpha} \vec{z}) \wedge \vec{z}_4 = \dot{\beta} \vec{x}_4 + \dot{\alpha} \sin(\beta) \vec{y}_3 \\ \left. \frac{d\vec{x}_5}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} &= \underbrace{\left. \frac{d\vec{x}_5}{dt} \right|_{\mathcal{B}_5}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega_{5/0}} \wedge \vec{x}_5 = ((\dot{\beta} + \dot{\theta}) \vec{y}_3 + \dot{\alpha} \vec{z}) \wedge \vec{x}_5 = -(\dot{\beta} + \dot{\theta}) \vec{z}_5 + \dot{\alpha} \cos(\theta + \beta) \vec{y}_3\end{aligned}$$

il vient finalement

$$\boxed{\overrightarrow{V_{G_5,5/0}} = \dot{\delta} \vec{y} + \dot{\lambda} \vec{x} + h (\dot{\beta} \vec{x}_4 + \dot{\alpha} \sin(\beta) \vec{y}_3) + b (\dot{\alpha} \cos(\theta + \beta) \vec{y}_3 - (\dot{\beta} + \dot{\theta}) \vec{z}_5)}$$

Si seules les liaisons $\mathcal{L}_{1/0}$ et $\mathcal{L}_{4/3}$ sont actives, alors on a $\dot{\lambda} = 0$ et $\dot{\alpha} = \dot{\theta} = 0$. Avec de plus $\alpha = \theta = 0$, il vient :

$$\overrightarrow{V_{G_5,5/0}} = \dot{\delta} \overrightarrow{y} + \dot{\beta} (h \overrightarrow{x_4} - b \overrightarrow{z_5})$$

Question 2.9. Par définition, l'accélération du point G_5 appartenant à **5** dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ est :

$$\overrightarrow{\Gamma_{G_5,5/0}} = \left. \frac{d\overrightarrow{V_{G_5,5/0}}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = \ddot{\delta} \overrightarrow{y} + \ddot{\beta} (h \overrightarrow{x_4} - b \overrightarrow{z_5}) + \dot{\beta} \left(h \left. \frac{d\overrightarrow{x_4}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} - b \left. \frac{d\overrightarrow{z_5}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} \right)$$

Avec $\ddot{\beta} = 0$ et

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\overrightarrow{x_4}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} &= \underbrace{\left. \frac{d\overrightarrow{x_4}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_4}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{\Omega_{4/0}} \wedge \overrightarrow{x_4} = \dot{\beta} \overrightarrow{y_3} \wedge \overrightarrow{x_4} = -\dot{\beta} \overrightarrow{z_4} \\ \left. \frac{d\overrightarrow{z_5}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} &= \underbrace{\left. \frac{d\overrightarrow{z_5}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_5}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{\Omega_{5/0}} \wedge \overrightarrow{z_5} = \dot{\beta} \overrightarrow{y_3} \wedge \overrightarrow{z_5} = \dot{\beta} \overrightarrow{x_5} \end{aligned}$$

il vient finalement

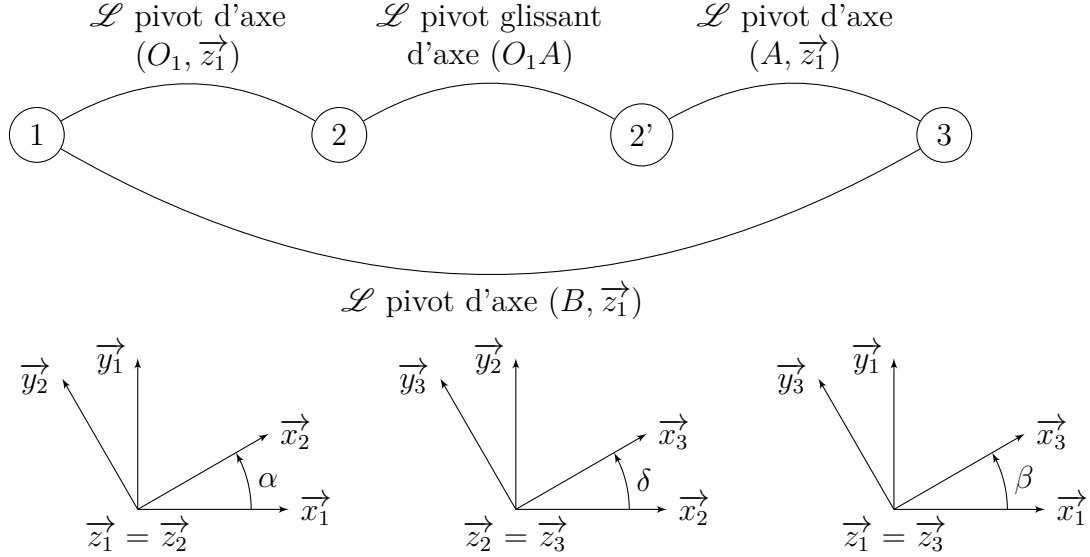
$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{G_5,5/0}} = \ddot{\delta} \overrightarrow{y} - \dot{\beta}^2 (h \overrightarrow{z_4} + b \overrightarrow{x_5})}$$

Question 2.10. Pour conclure quant au respect du cahier des charges, il est nécessaire que calculer la norme de la vitesse et de l'accélération, mais il manque les valeurs maximales de $\dot{\delta}$, $\ddot{\delta}$ et $\dot{\beta}$.

— EXERCICE 3 —

Mécanisme de levage

Question 3.1.



Question 3.2. Par relation de Chasles, il vient :

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{O_1 A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO_1} \\ &= \lambda \vec{x}_2 + b \vec{x}_3 - a \vec{x}_1 \end{aligned}$$

Pour faire apparaître la mesure d'angle β , il est nécessaire de projeter cette expression dans la base $\mathcal{B}_1$ ou dans la base $\mathcal{B}_3$. Dans les deux cas il y a aura une mesure d'angle en plus à faire disparaître. Dans la base $\mathcal{B}_1$, il vient :

$$\begin{cases} / \vec{x}_1 : & 0 = \lambda \cos(\alpha) + b \cos(\beta) - a \\ / \vec{y}_1 : & 0 = \lambda \sin(\alpha) + b \sin(\beta) \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda \cos(\alpha) = a - b \cos(\beta) \\ \lambda \sin(\alpha) = -b \sin(\beta) \end{cases}$$

En élevant au carré les deux expressions, il vient par somme :

$$\lambda^2 = (a - b \cos(\beta))^2 + b^2 \sin^2(\beta)$$

Prenant $b < a$, il vient dans la configuration $\alpha \equiv 0 [2\pi]$, $\lambda = a - b > 0$ d'où

$$\boxed{\lambda = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\beta)}}$$

Question 3.3. Notant $\lambda : \beta \mapsto \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\beta)}$, il vient par dérivation de fonctions composées

$$\dot{\lambda} \frac{d\lambda}{d\beta} \times \frac{d\beta}{dt} = \frac{ab \sin(\beta)}{\lambda(\beta)} \dot{\beta}$$

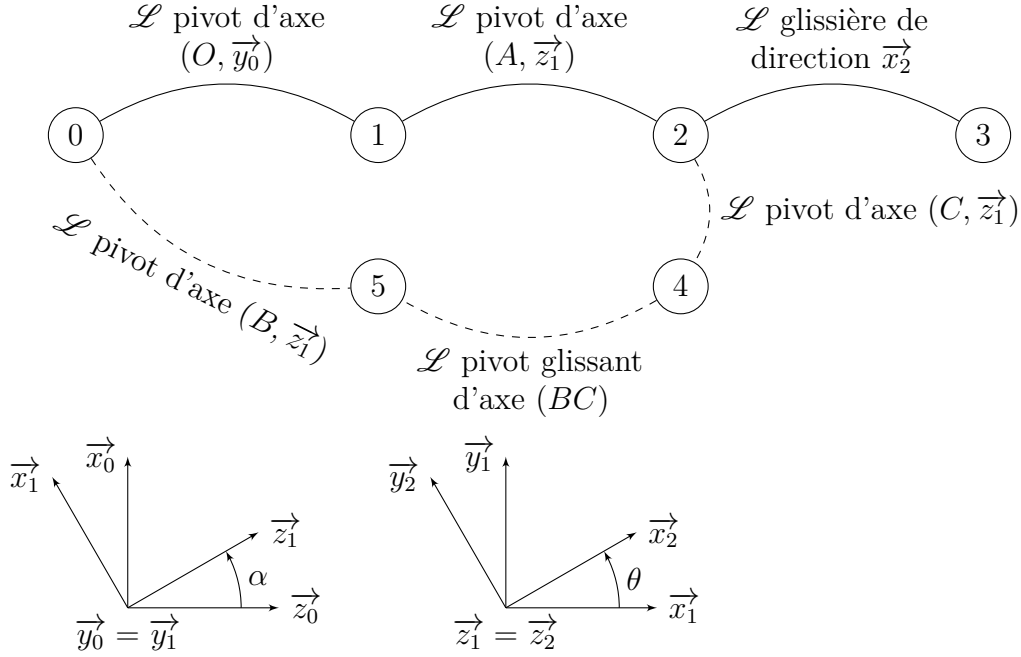
d'où

$$\dot{\beta} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\beta)}}{ab \sin(\beta)} \dot{\lambda}$$

C'est une relation cinématiquement linéaire mais géométriquement non-linéaire.

Échelle Pivotante Automatique à commande Séquentielle

Question 4.1.



Par définition, avec la première figure géométrale de normale $\vec{y}_0$ et de variation d'angle $\dot{\alpha}$, il vient :

$$\overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha} \vec{y}_0$$

De même avec la deuxième, on trouve :

$$\overrightarrow{\Omega}_{2/1} = \dot{\theta} \vec{z}_1$$

Question 4.2. Par composition des mouvements, la trajectoire du point D de la nacelle liée à l'échelle **3** dans son mouvement par rapport au châssis **0** dépend de trois contributions :

$T_{D/2}$ Comme $\{\mathcal{V}_{3/2}\}$ est une translation de direction $\vec{x}_2$, le point $D \in S_3$ décrit dans $\mathcal{R}_2$ un segment sur la droite (AD) ;

$T_{D \in 2/1}$ Comme $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$ est une rotation d'axe $(A, \vec{z}_1)$, le point $D \in S_2$ décrit dans $\mathcal{R}_1$ un arc de cercle de centre O , de rayon $AD = c + d$, dans le plan de normale $\vec{z}_1$;

$T_{D \in 1/0}$ Comme $\{\mathcal{V}_{1/0}\}$ est une rotation d'axe $(O, \vec{y}_1)$, le point $D \in S_1$ décrit dans $\mathcal{R}_0$ un arc de cercle de centre H , le projeté orthogonal du point D sur la droite $(O, \vec{y}_1)$, de rayon $\|\overrightarrow{OD} \wedge \vec{y}_0\|$, dans le plan de normale $\vec{y}_0$.

Question 4.3. Par définition, la position du point D par rapport au bâti $\mathcal{R}_0$ d'origine O est définie par le vecteur $\overrightarrow{OD}$. Par relation de Chasles, il vient :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = a\vec{y}_0 - b\vec{x}_1 + (c + d)\vec{x}_2$$

Définissant la hauteur comme

$$h = \overrightarrow{OD} \cdot \vec{y}_0 = a + (c + d) \sin(\theta)$$

il vient avec les données du sujet que la hauteur maximale atteignable est :

$$h_{\max} = a + (c + d_{\max}) \sin(\theta_{\max}) = 0,5 + (1 + 25) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1 + 26\sqrt{3}}{2} \approx 23 \text{ m}$$

Question 4.4. Par définition, la vitesse du point D appartenant à l'échelle **3** dans son mouvement par rapport au châssis **0** est

$$\overrightarrow{V}_{D,3/0} = \left. \frac{d\overrightarrow{OD}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = -b \left. \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} + \dot{d}\vec{x}_2 + (c + d) \left. \frac{d\vec{x}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0}$$

avec, par formule de dérivation vectorielle,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} &= \left. \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right|_{\mathcal{B}_1} + \overrightarrow{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{x}_1 = -\dot{\alpha} \vec{z}_1 \\ \left. \frac{d\vec{x}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} &= \left. \frac{d\vec{x}_2}{dt} \right|_{\mathcal{B}_2} + \overrightarrow{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{x}_2 = (\dot{\alpha} \vec{y}_0 + \dot{\theta} \vec{z}_1) \wedge \vec{x}_2 = -\dot{\alpha} \cos(\theta) \vec{z}_1 + \dot{\theta} \vec{y}_2 \end{aligned}$$

il vient finalement

$$\overrightarrow{V}_{D,3/0} = \underbrace{\dot{\alpha} (b - (c + d) \cos(\theta)) \vec{z}_1}_{\overrightarrow{V}_{D,1/0}} + \underbrace{\dot{\theta} (c + d) \vec{y}_2}_{\overrightarrow{V}_{D,2/1}} + \underbrace{\dot{d} \vec{x}_2}_{\overrightarrow{V}_{D,3/2}}$$

Question 4.5. Considérant la liaison $\mathcal{L}_{1/0}$ bloquée, c'est-à-dire avec $\dot{\alpha} = 0$, et sachant que $\overrightarrow{V}_{D,3/0}$ est directement exprimée dans la base orthonormale $\mathcal{B}_2$, il vient :

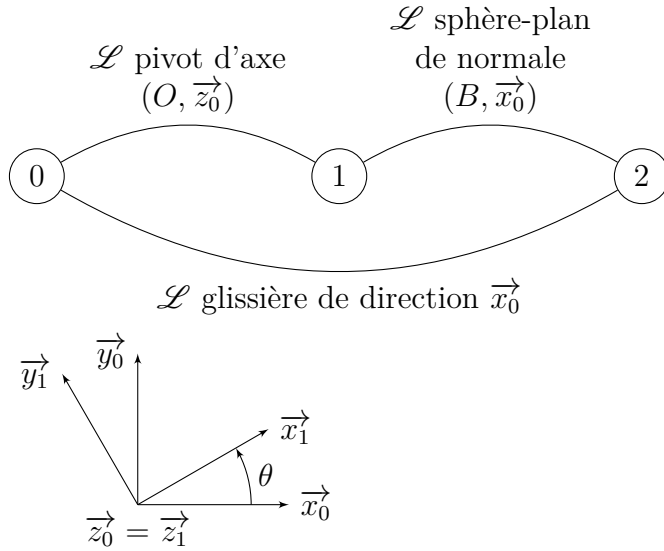
$$\left\| \overrightarrow{V}_{D,3/0} \right\| = \sqrt{\dot{\theta}^2 (c + d)^2 + \dot{d}^2} \leq 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Question 4.6. En faisant l'hypothèse d'une vitesse $\dot{d}$ constante, il vient

$$\sqrt{\dot{\theta}^2 (c + d)^2 + \dot{d}^2} \leq v_{\max} \iff \left| \dot{\theta} \right| \leq \sqrt{\frac{v_{\max}^2 - \dot{d}^2}{c + d}}$$

Pompe hydraulique à pistons radiaux

Question 5.1.



L'entrée du mécanisme est le mouvement de rotation continue de 1 par rapport à 0. Le mouvement de sortie est la translation alternative de 2 par rapport à 0.

Question 5.2. Par relation de Chasles, il vient :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \iff X\vec{x}_0 = e\vec{x}_1 + R\vec{x}_0 + \lambda\vec{y}_0$$

Il vient en projection dans la base $\mathcal{B}_0$

$$\begin{cases} / \vec{x}_0 : & X = e \cos(\theta) + R \\ / \vec{y}_0 : & 0 = e \sin(\theta) + \lambda \end{cases}$$

Question 5.3. Par dérivation, il vient

$$\dot{X} = -e \sin(\theta) \dot{\theta}$$

Question 5.4. Le débit instantané correspond au flux sortant. Il faut donc distinguer l'admission en fluide à comprimer du refoulement de celui qui vient d'être comprimé.

$$Q_i = \max(0; S \dot{X}(t)) = \frac{S}{2} (\dot{X} + |\dot{X}|)$$

où pour ne garder que l'alternance positive de la translation, nous avons fait sa moyenne avec sa valeur absolue.

Question 5.5. On a, à vitesse constante $\dot{\theta} = \omega > 0$, l'expression du débit instantané

$$Q_i = \frac{eS}{2} (\sin(\theta) + |\sin(\theta)|) \omega$$

Question 5.6. En tenant compte du fait que la pompe comporte trois pistons équi-répartis angulairement, il vient l'expression du débit instantané total

$$Q = \sum_{i=0}^2 Q_i = \frac{eS}{2} \sum_{i=0}^2 \left(\sin\left(\theta + \frac{2i\pi}{3}\right) + \left| \sin\left(\theta + \frac{2i\pi}{3}\right) \right| \right) \dot{\theta}$$

Le débit moyen par piston est défini par :

$$\bar{Q}_i = \int_0^{2\pi} \frac{eS}{2} \omega (\sin(\theta) + |\sin(\theta)|) d\theta = eS\omega \left(\int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} 0 d\theta \right) = 2eS\omega$$

conduisant, par somme, au débit moyen avec 3 pistons

$$\boxed{\bar{Q} = 6eS\omega}$$

Question 5.7. Avec des pistons de section circulaire de diamètre $D = 5 \text{ mm}$ et $e = 10 \text{ mm}$, il vient :

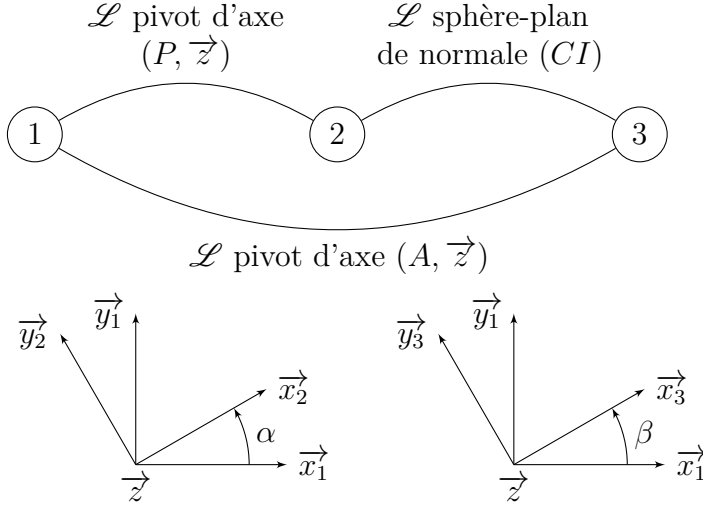
$$0,5 \text{ L/min} = \frac{1}{120 \times 10^3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \leq \bar{Q} = \frac{6\pi e D^2}{4} \omega \leq 20 \text{ L/min}$$

d'où la vitesse de rotation minimale permettant de respecter le cahier des charges :

$$\boxed{\omega \geq \frac{1}{180 \times 10^3 \pi e D^2} \approx 7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Modélisation du système de distribution VTEC

Question 6.1.



Question 6.2. Par définition d'une liaison sphère-plan, la normale au contact dans le plan $(I, \vec{z}, \vec{x}_3)$ est la droite $(CI) = (I, \vec{y}_3)$. Avec $CI = R$, il vient

$$\boxed{\overrightarrow{CI} = R\vec{y}_3}$$

Pour montrer qu'il doit y avoir nécessairement glissement en I entre les pièces **2** et **3** lors du fonctionnement du mécanisme, il suffit de constater que :

- le point $I \in S_2$ est en rotation autour de l'axe $(P, \vec{z})$ et donc que la vitesse $\overrightarrow{V}_{I,2/1}$ est colinéaire à $\overrightarrow{IP} \wedge \vec{z}$;
- le point $I \in S_3$ est en rotation autour de l'axe $(A, \vec{z})$ et donc que la vitesse $\overrightarrow{V}_{I,3/1}$ est colinéaire à $\overrightarrow{IA} \wedge \vec{z}$.

Or, comme $\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IP} \neq \vec{0}$, alors par somme vectorielle, il vient que la vitesse de glissement $\overrightarrow{V}_{I,3/2} \neq \vec{0}$ est nécessairement non nulle.

Question 6.3. Par relation de Chasles, il vient :

$$\begin{aligned}
 \vec{0} &= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA} \\
 &= \lambda \vec{x}_3 - R\vec{y}_3 - e\vec{x}_2 - a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1
 \end{aligned}$$

Il vient en projection dans la base $\mathcal{B}_1$

$$\boxed{
 \begin{cases}
 / \vec{x}_1 : & 0 = \lambda \cos(\beta) + R \sin(\beta) - e \cos(\alpha) - a \\
 / \vec{y}_1 : & 0 = \lambda \sin(\beta) - R \cos(\beta) - e \sin(\alpha) + b
 \end{cases}
 }$$

Question 6.4. Par relation de changement de point, on a :

$$\overrightarrow{V_{I,2/1}} = \underbrace{\overrightarrow{V_{P,2/1}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{PI} = \dot{\alpha} \vec{z} \wedge (e\vec{x}_2 + R\vec{y}_3) = \dot{\alpha} (e\vec{y}_2 - R\vec{x}_3)$$

et

$$\overrightarrow{V_{I,3/1}} = \underbrace{\overrightarrow{V_{A,3/1}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{\Omega_{3/1}} \wedge \overrightarrow{AI} = \dot{\beta} \vec{z} \wedge (\lambda \vec{x}_3) = \dot{\beta} \lambda \vec{y}_3$$

Comme la vitesse de glissement $\overrightarrow{V_{I,3/2}}$ est, par définition, colinéaire à $\vec{x}_3$, il vient par composition des vitesses au point I dans la direction $\vec{y}_3$

$$\overrightarrow{V_{I,3/1}} \cdot \vec{y}_3 = \underbrace{\overrightarrow{V_{I,3/2}} \cdot \vec{y}_3}_{=0} + \overrightarrow{V_{I,2/1}} \cdot \vec{y}_3 \iff \dot{\beta} \lambda = \dot{\alpha} e \cos(\beta - \alpha) \iff \boxed{\dot{\beta} = \frac{e \cos(\beta - \alpha)}{\lambda} \dot{\alpha}}$$

Système d'aide à la navigation

7.1 Modélisation du comportement de la pompe

Question 7.1. On note H le point intersection du plateau de normale $\vec{n}$ avec la droite $(O, \vec{x}_0)$ tel que $\overrightarrow{HI} = \mu \vec{t}$, avec $\vec{t} \cdot \vec{n} = 0$ et on note $\delta = \overrightarrow{HC} \cdot \vec{x}_0$. Par relation de Chasles, il vient :

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HO} \\ &= r\vec{y}_1 + \delta\vec{x}_0 + R\vec{n} - \mu\vec{t} \end{aligned}$$

Question 7.2. La caractéristique invariante d'une liaison sphère-plan est l'absence de translation suivant la normale au contact, soit :

$$\overrightarrow{CI} \cdot \vec{n} = R$$

En exploitant la relation de Chasles en projection dans la direction $\vec{n}$,

$$R = -\delta\vec{x}_0 \cdot \vec{n} - r\vec{y}_1 \cdot \vec{n} = -\delta \cos(\beta) + r \cos(\theta_{1/0}) \sin(\beta)$$

il vient la loi entrée sortie du mécanisme :

$$\delta = \frac{R}{\cos(\beta)} + r \cos(\theta_{1/0}) \tan(\beta)$$

7.2 Vérification du débit moyen de la pompe

Question 7.3. La course du piston est définie comme la différence des positions maximale et minimale de δ , respectivement atteintes pour $\theta_{1/0} \equiv 0 [2\pi]$ et $\theta_{1/0} \equiv \pi [2\pi]$. Il vient alors par différence :

$$c = 2r \tan(\beta)$$

Avec $n = 6$ pistons de diamètre d , on en déduit la cylindrée totale

$$\text{Cyl} = nc \frac{\pi d^2}{4} = 3r \tan(\beta) \pi d^2$$

Question 7.4. Le débit moyen est défini comme le produit de la cylindrée et de la vitesse de rotation, soit

$$\bar{Q} = \text{Cyl} \omega_{1/0} = 3r \tan\left(\frac{25,6 \times \pi}{180}\right) \pi d^2 \times \frac{1\,800 \times \pi}{30} \approx 270,9 r d^2$$

Faire l'application numérique avec les valeurs de r et d ...

Question 7.5. Reste à comparer avec la spécification du constructeur.