Fiche 29 : Polynômes.

Exercice 1

Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et si $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$$

On pourra commencer par étudier, sur $\mathbb{R}_+$, les fonctions $f(x) = \frac{1}{1+x}$ et $g(x) = f(f(x))$.

Exercice 2

Que peut-on dire ...

1. ... d'un polynôme qui a une infinité de racines ?
2. ... de 2 polynômes égaux en une infinité de points ?
3. ... d'un polynôme périodique ?

Exercice 3

Calculer les restes de la division euclidienne du polynôme X^n par les polynômes : $X^2 + 3X + 2$, $X^2 + X + 1$ puis $(X - 1)^2$.

Exercice 4

Déterminer pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ le polynôme : $P = X^2 + X + 1$ divise le polynôme $Q = X^{2n} + X^n + 1$.

Même question avec les polynômes $P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ et $Q = X^{4n} + X^{3n} + X^{2n} + X^n + 1$.

Exercice 5

On considère la suite (T_n) de polynômes donnés par : $T_0 = 1$, $T_1(X) = X$ et, si $n \in \mathbb{N}$:

$$T_{n+1}(X) = 2X.T_n(X) - T_{n-1}(X)$$

1. Préciser $T_2, \dots , T_5$.
2. Préciser $\deg(P_n)$ et le coefficient dominant de P_n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que si $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:
$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$
4. Si $n \in \mathbb{N}$, résoudre l'équation $T_n(\cos(\theta)) = 0$.
5. En déduire que, si $n \in \mathbb{N}$, les racines de T_n et sa factorisation réelle.
6. Utiliser T_5 pour déterminer $\cos(\pi/10)$.

Exercice 6

Montrer que $\alpha = 2\cos\frac{2\pi}{7}$ est racine de $P = X^3 + X^2 - 2X - 1$. Quelles sont les autres racines ?

Montrer que α est irrationnel.