Fiche 30 TD du 07-12.

Exercice 1

On considère la fonction définie par $f(x) = 1 - x^2$ et la suite

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \begin{cases} u_0 = 1/2 \\ \text{Si } n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On considère aussi l'expression $P(x) = f(x) - x = 1 - x - x^2$

1. Représenter graphiquement la fonction f et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f.
3. Déterminer le point fixe de f sur $[0, 1]$. Montrer que l'expression $f(f(x)) - x$ est factorisable par $P(x)$ et étudier le signe de $f(f(x)) - x$ sur $[0, 1]$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$0 < u_{2(n+1)} < u_{2n} < u_{2n+1} < u_{2(n+1)+1} < 1$$
On pourra pour cela étudier la fonction $g = f \circ f$ sur $[0, 1]$.
5. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 2

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une solution unique $\alpha \in]0, 1/2[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ et en déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0, 1/2]$.
3. Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$. En déduire que la suite (x_n) est croissante.
4. Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que $0 \leq x_n < 1/2$ pour tout $n \geq 0$.
5. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers α.

Exercice 3

Pour tout n entier supérieur où égal à 4, on considère le polynôme de degré n à coefficients réels :

$$P_n(X) = X^n + X^{n-1} + X^2 + X - 1$$

1. Soit $n \geq 4$. Montrer que P_n a, dans $\mathbb{R}_+$, une unique racine que l'on nommera λ_n.
2. Montrer que la suite $(\lambda_n)_{n\geq 4}$ est croissante puis qu'elle converge vers une limite finie que l'on notera ℓ.
3. On note α la racine positive du polynôme $X^2 + X - 1$.
Montrer que $(\lambda_n)_{n\geq 4}$ est majorée par α. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 4

Soit $A > 0$, étudier la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{A}{v_n}\right)$$

En posant

$$w_n = \frac{v_n - \sqrt{A}}{v_n + \sqrt{A}}$$